ЗАДАЧИ К ЛЕКЦИИ 08/02/2020

1. Познакомьтесь, группы

Основной референс для этого раздела это книжка Каргаполова и Мерзлякова [1], откуда я бесстыдно своровал кое-какие задачи и определения.

1.1. **Определение группы.**

Определение 1.1. Множество G с операцией $\star$ от двух аргументов (т.е. *бинарной*) называется группой, если:

(1) Операция *ассоциативна*, т.е. $\forall a, b, c \in G \Rightarrow (a \star b) \star c = a \star (b \star c)$.
(2) У операции $\star$ существует *единица*, т.е. $\exists\, e \in G : \forall a \in G \Rightarrow e \star a = = a \star e = a$.
(3) Для всякого $a \in G$ существует *обратный элемент* в G относительно операции $\star$, т.е. $\exists\, a^{-1} \in G : a \star a^{-1} = a^{-1} \star a = e$.

Определение 1.2. Множество G с бинарной операцией $\star$ называется группой, если:

(1) Операция *ассоциативна*.
(2) Для всех элементов существуют *правые и левые обратные*, т.е. $\forall a, b \in G\ \exists\, x, y \in G : \ x \star a = b,\ a \star y = b$.

Задача 1. Правда ли что следующие множества с операцией являются группами (в смысле какого-то из определений):

a) $(\mathbb{N}, +)$ (Натуральные числа с операцией сложения);
b) $(\mathbb{Z}, +)$ (Целые числа с операцией сложения);
c) $(\mathbb{Z}/2, +)$ (Остатки по модулю 2 с операцией сложения);
d) $(\mathbb{Z}/28, +)$;
e) $(\mathbb{Z}/m, +),\ m \in \mathbb{N}$;
f) $(\mathbb{C}, +)$ (Комплексные числа с операцией сложения);
g) Двумерные векторы с операцией сложения векторов;
h) $(\mathbb{R}/2\pi, +)$ (Вещественные числа по модулю 2π с операцией сложения);
i) Множество всех поворотов вокруг данной точки с операцией композиции;
j)* Множество симметрий относительно всех прямых на плоскости с операцией композиции;
k)* Множество инверсий относительно всех окружностей на плоскости с операцией композиции?

Задача 2.* Если в предыдущей задаче какие-то множества с операцией не являются группами, то постарайтесь добавить в них элементы, таким образом, чтобы получились группы. Постарайтесь сделать это самым простым способом.

Замечание. Если операция на группе ясна из контекста, мы не будем писать её явно и обозначать обычным умножение.

Задача 3 (Про детали определения группы)**.**

a) Сколько элементов в G удовлетворяют определению единицы группы?
b) Какой обратный элемент у e в смысле первого определения группы?
c) Сколько обратных элементов может быть у данного элемента в смысле первого определения группы?
d) А в смысле второго?
e) Докажите эквивалентность первого и второго определений группы.

1.2. **Гомоморфизм и изоморфизм.** В математике естественно изучать объекты, а ещё более естественно изучать отображения между ними. Отображения между группами называются гомоморфизмами.

Определение 1.3. *Гомоморфизмом* из группы $(G, \star)$ в группу $(G', \ast)$ называется отображение множеств $\varphi : G \to G'$, которое кроме того удовлетворяет следующему условию: $\forall g, h \in G \Rightarrow \varphi(g \star h) = \varphi(g) \ast \varphi(h)$.

Задача 4. Проверьте, что если $\varphi : G \to G'$ гомоморфизм групп, то

a) $\varphi(e_G) = e_{G'}$;
b) $\forall a \in G \Rightarrow \varphi(a^{-1}) = \varphi(a)^{-1}$

Определение 1.4. *Изоморфизмом* называется биективный гомоморфизм $\varphi : G \to G'$. (Тут мы как раз считаем, что операции в группах G и G' нам известны).
Группы называются *изоморфными* если между ними существует изоморфизм.

Задача 5. Докажите, что если $\varphi : G \to G'$ это изоморфизм, то $\varphi^{-1} : G' \to G$ (обратное отображение множеств) также изоморфизм.

Задача 6. Есть ли среди тех объектов, которые вы определили в задачах 1 и 2 изоморфные группы? Приведите как можно больше примеров пар изморфных групп из этих задач.

Определение 1.5. Подгруппой H в группе G называется подмножество $H \subseteq G$ такое, что:

(1) *H замкнуто относительно операции* в G, т.е. $\forall h_1, h_2 \in H \Rightarrow h_1 h_2 \in H$;
(2) *H замкнуто относительно взятия обратного* в G, т.е. $\forall h_1 \in H \Rightarrow h_1^{-1} \in H$;

Задача 7. Правда ли, что всякая подгруппа является группой? Правда ли, что всякая подгруппа является образом некоторого гомоморфизма групп?

Список литературы

[1] М.И. Каргаполов и Ю.И. Мерзляков. *Основы теории групп*. Издательство "Наука Главная редакция физико-математической литературы, 1977. URL: `https://books.google.ru/books?id=TenuAAAAMAAJ`.