

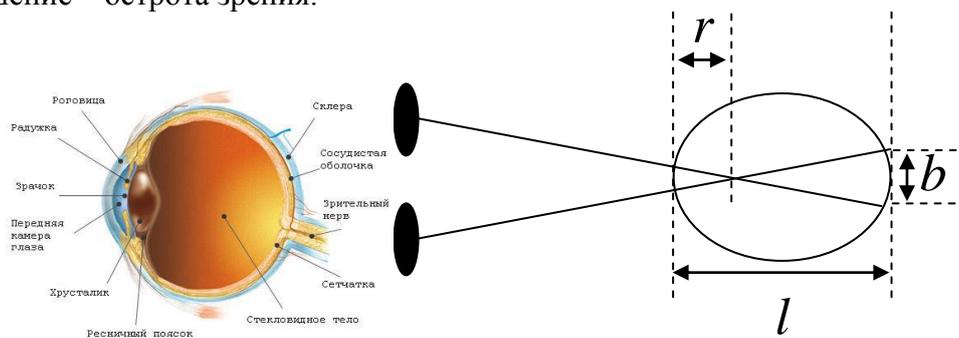
Физики в тумане

Капельки воды в тумане имеют диаметр 10^{-5} м. Какова *водность* воздуха, если днём в тумане в десяти шагах (7 м) узнать человека невозможно? Водностью называется количество жидкой воды в 1 м^3 воздуха, выраженное в $\text{г}/\text{м}^3$.

Аналогия, очевидная для рассматриваемой ситуации: нужно прочесть текст, написанный черными символами на белой бумаге, сквозь слой тумана при условии, что освещен не только лист с надписью, но и все вокруг. Не вполне определенное условие: «узнать невозможно» следует перевести на «физико-математический язык». Чтобы «узнать» человека, нужно «прочесть надписи» на его лице, то есть распознать структуру темных и светлых участков, которая у каждого человека индивидуальна.

Основными параметрами, определяющими возможность узнавания, являются «острота зрения» и контраст изображения на сетчатке глаза.

Начнем с остроты зрения. В воздухе при отсутствии тумана человек может по четкой фотографии определенного размера узнать, кто на ней изображен, только в некотором диапазоне расстояний. Чем дальше от глаз находится фотография, тем меньше размеры её изображения на сетчатке глаза, и тем меньшее количество светочувствительных клеток (колбочек) принимают участие в «распознавании». Измерения, проведенные с большим количеством участников, показывают, что для большинства людей с «нормальным» зрением вполне доступно определить с расстояния около 10 метров как отдельные одинаковые темные пятна диаметром $g=1$ мм с зазором между ними равным их диаметру. Пятна располагаются на хорошо освещенной белой поверхности. То есть угловое разрешение глаза при нормальном зрении составляет около 1 угловой минуты. При увеличении расстояния в 2, а тем более в 3 раза большинство людей уже не могут отличить два таких пятнышка от сплошной черточкой с длиной равной 3 диаметрам пятнышек и с такой же площадью черной поверхности. Связано это с тем, что колбочки¹ сетчатки человеческого глаза имеют поперечные размеры около $b=0,001\div 0,004$ мм, при этом максимальная «длина глаза» l составляет около 25 мм, а радиус кривизны «роговицы» - прозрачной передней стороны склеры (оболочки глаза) равен примерно $r=8$ мм. Этими тремя величинами и определяется предельное угловое разрешение – острота зрения.



Если расстояние от глаза до пятнышек с размерами g обозначить символом B , то предельное расстояние, на котором еще можно различать эти пятнышки как разные, найдется из очевидного (чисто геометрического) соотношения:

$$B \leq \frac{g(l-r)}{b} \approx 4 \div 16 \text{ м}$$

При этом изображение на сетчатке глаза, создаваемое каждым пятнышком (с диаметрами 1 мм), может «накрыть» одну колбочку. Чтобы глаз мог «видеть» два темных пятнышка раздельными, нужно, чтобы они попадали на разные колбочки, и между ними была бы как минимум одна освещенная колбочка. Если же расстояние B увеличить в 3

¹ Колбочки — один из двух типов фоторецепторных клеток сетчатки глаза. Свое название колбочки получили из-за конической формы. Их длина около 50 мкм, диаметр — от 1 до 4 мкм.

раза, то изображения расположенных рядом пятнышек «лягут» на одну колбочку или не попадут ни на одну колбочку. И в одном и в другом случае различить пятнышки, как отдельные, не удастся.

Световые пятнышки (темные или светлые) на сетчатке глаза теоретически могут быть минимального размера около 0,004 мм, что связано с волновой природой света. Действительно, при диаметре зрачка глаза $D_z = 6$ мм, длине волны $\lambda = 0,5$ мкм (в воздухе) на расстоянии $l = 25$ мм в среде с коэффициентом преломления $n_{св} = 1,33$ диаметр пятна d (по диаметру первого минимума дифракционной картины) составит:

$$d = 2 \times 1,22 \times \frac{\lambda l}{D_z n_{св}} \approx 4 \text{ мкм}$$

Всего колбочек в сетчатке одного глаза около 7-8 миллионов, а область наиболее резкого зрения ограничивается телесным углом с максимальным «раствором» около 7° . На сетчатке глаза этому углу соответствует так называемая «центральная ямка», в которой сосредоточено около 10% всех колбочек: примерно 800×800 .² Остальные колбочки распределены по поверхности сетчатки глаза в тех местах, где глаз видит «боковым зрением». С увеличением угла отклонения лучей от направления прямого зрения до 10° острота зрения падает примерно в 5 раз. А при ещё больших углах – уменьшается ещё больше. И это легко понять – в тех местах на сетчатке глаза в принципе невозможно получить «точечное» изображение светящейся точки, поэтому здесь нет необходимости иметь большую концентрацию светочувствительных клеток.

Это справедливо не только для глаза, но и для собирающей линзы в воздухе, то есть проверить, что это на самом деле так, можно с помощью собирающих линз, имеющихся в любом школьном кабинете физики. Кстати, и для глаза, и для простой стеклянной линзы со сферическими поверхностями параллельные лучи света, составляющие «немаленькие» углы с осью симметрии оптической системы, вовсе не собираются в фокальной плоскости, перпендикулярной главной оптической оси. Наилучшая «концентрация» таких лучей получается на кривой внутренней поверхности глаза (на сетчатке), форма которой выбиралась природой в течение миллионов лет эволюции «зрячих» живых существ.

При удалении от глаз наблюдателя фотографии, по которой нужно узнать человека, размер изображения на сетчатке глаза уменьшается, и когда информации для распознавания становится недостаточно, узнать, кто изображен на фото, становится невозможно. Насколько велико требуемое количество информации? Конкретнее: сколько пятнышек должно быть в изображении, и как должны отличаться яркости этих пятнышек, чтобы узнать – кто изображен на фотографии? С помощью компьютера можно провести простой эксперимент, в котором цифровые фотографии одних и тех же геометрических размеров формируются разными количествами светлых и темных пятен. То есть их «размер в пикселях» (или в колбочках) постепенно увеличивается. Начиная с некоторого количества пятен, можно узнать человека на фотографии.



6×7



12×14



24×27



48×54

Видно, что для картинка, составленной из 24×27 пятен уже можно при небольшой доле фантазии «узнать» изображенного человека (знакомого нам по портретам).

На светлом фоне тумана вся фигура человека и его лицо, естественно, выглядят темными. Максимальная яркость пятен на лице определяется коэффициентом отражения света, и составляет около 0,5. Есть и более темные участки изображения лица на сетчатке

² Не зря в паспорта вклеивают фотографии $3\text{см} \times 4\text{см}$ – при рассматривании такой фотографии с расстояния наилучшего зрения 25-30 см она видна как раз под углом около 7° , и её изображение попадает на центральную ямку с максимальной концентрацией колбочек на сетчатке.

глаза вплоть до контрастности 1,0, которая определяется как отношение разности максимальной и минимальной яркостей пятен к максимальной яркости $(E_{\max}-E_{\min})/E_{\max}$. Можно выражать эту величину в процентах, и тогда максимальная контрастность будет равна 100%.

Диапазон от 0,5 до 0,1 по степени яркости (или от 0 до 80% по контрастности) можно разбить на несколько частей. Причем для надежного распознавания деталей нужно, чтобы на границах пятен яркость скачком изменялась на заметную величину. Если изменение яркости составляет 20%, то достаточно всего 4-х уровней для «заполнения» всего диапазона ($80/20 = 4 = 2$ бита). В результате минимальное количество информации (в битах), необходимое для распознавания лица человека, равно примерно:

$$30 \times 30 \times 2 = 1,8 \times 10^3.$$

При отсутствии тумана и при нормальном освещении человека с характерным размером головы 20 см можно узнать по лицу с расстояния, равного примерно:

$$40m = 0,3m \times (20\text{см}/4\text{см}) \times (800/30).$$

Здесь 0,3 м – это расстояние наилучшего зрения, множитель $\times(20\text{см}/4\text{см})$ обеспечивает «размещение» изображения лица человека на «центральной ямке», а множитель $\times(800/30)$ «доводит» размер изображения «в колбочках» до величины 30×30 . В условии задачи указанное расстояние (10 шагов или 7 метров) гораздо меньше сорока метров, то есть не это обстоятельство (уменьшение размеров изображения на сетчатке глаза) мешает узнать человека в тумане.

При наличии между глазом наблюдателя и рассматриваемым объектом «подсвеченного» тумана контрастность изображения на сетчатке глаза убывает по мере удаления от объекта наблюдения, постепенно уменьшаясь до нуля. Это обусловлено двумя процессами, идущими одновременно. Во-первых, по мере удаления от источника свет постепенно рассеивается, но это не самое главное, а главное то, что (во-вторых) по мере увеличения толщины слоя тумана между источником света и глазом растет «подсветка». Доля света, идущего напрямую в глаза наблюдателя от источника света (фотографии), падает, а доля света от других источников, рассеянного каплями тумана и тоже попадающего в глаза, растет. На серии картинок, приведенных ниже для иллюстрации этого явления (подсветки), отчетливо видно, что яркость окружения не меняется, светлые пятна на картинках становятся ещё светлее, и темные пятна постепенно светлеют, пока и те и другие не сравниваются по яркости с окружением. Переход от первой пары фотографий (слева) ко второй, и так далее (вправо) соответствует увеличению «плотности» тумана в определенное число раз.



Портреты в крайней справа паре фотографий настолько светлые, что по лицам уже узнать кого-либо затруднительно, а вот подписи к рисункам всё ещё читаются. Это говорит о том, что для распознавания образов, в частности лиц людей, важны резкие темные линии. Такие линии характеризуют форму глаз, бровей, рта, носа. Вот по этим линиям мы и узнаем тех, кто изображен на рисунке или фотографии.

Натурный эксперимент можно провести, используя аквариум с плоскими стенками. Для получения тумана в чистую воду добавляется молоко. «Плотность тумана» изменяется постепенным добавлением все большего количества молока.

Когда говорят об узнавании на расстоянии, то обычно предполагают, что для этой операции достаточно «одного взгляда». Поэтому мы облегчим задачу, указав в качестве

минимальной контрастности величину 20%. Вот этим количественным критерием мы и должны пользоваться для ответа на вопрос о *водности* воздуха, поставленный в условии задачи.

Количественные расчёты

Капельки диаметром 10 мкм значительно больше, чем все видимые глазами световые волны, поэтому можно считать, что рассеивание света не зависит от длины волны, то есть свет всех цветов рассеивается такими шариками одинаково и практически не поглощается.

Поскольку на капельки, находящиеся между двумя людьми, свет падает практически со всех сторон, можно считать, что каждая капелька является шаровым источником света с определенной яркостью или силой света. Белая стена тумана – это сплошная стена из таких шариков, поскольку в каком бы направлении мы ни смотрели, луч зрения на некотором расстоянии обязательно «упрется» в какой-нибудь из шариков. Если на пути к объекту наблюдения 80% площади «картинки» будет «покрыта» шариками, то в этом случае контрастность видимой «картинки» явно не превысит 20%. Таким образом можно найти связь между размерами капелек-шариков (D_k), их концентрацией в воздухе (n_k) и расстоянием (L), на котором человека в тумане «узнать невозможно».

Рассмотрим слой тумана площадью S с малой толщиной x . В объеме Sx находится $n_k Sx$ капелек. Они закрывают собой $\pi(D_k)^2 n_k x / 4$ долю площади. То есть не закрытой остается только $[1 - \pi(D_k)^2 n_k x / 4]$ доля площади. Если таких слоев много, то доля незакрытой площади становится всё меньше и меньше по мере увеличения количества слоев. При общей толщине слоя тумана, равной L , доля площади, оставшейся не закрытой, равна:

$$\left[1 - \frac{\pi D_k^2 n_k x}{4}\right]^{\frac{L}{x}} = \left[1 - \frac{\pi D_k^2 n_k x}{4}\right]^{\frac{4\pi D_k^2 n_k L}{4\pi D_k^2 n_k x}} = [1 + y]^{\frac{1}{y} \times \left(-\frac{\pi D_k^2 n_k L}{4}\right)} = e^{-\frac{\pi D_k^2 n_k L}{4}} = 0.2$$

В этой цепочке формул малая величина $\left(-\frac{\pi D_k^2 n_k x}{4}\right)$ обозначена символом y . А про

выражение $[1 + y]^{\frac{1}{y}}$ известно, что при стремлении y к нулю, написанное выражение имеет замечательное предельное значение, обозначаемое математиками символом e .

Отсюда можно найти концентрацию капель $n_k \approx 3 \times 10^9 \text{ м}^{-3}$ и искомую водность воздуха, которая равна:

$$\frac{\rho \pi D_k^3 n_k}{6} \approx 1,5 \times 10^{-3} \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$$

С. Варламов.