Разбор полетов электронов в опытах Франка и Герца.

«Мне сверху видно все, ты так и знай!»
Строка из песни.

Классические (в смысле проведенные классиками физики) опыты с прохождением тока через газовую среду, в качестве которой выступили пары ртути, описываются в школьных учебниках без подробностей, в которых, как это обычно и бывает, скрыта весьма интересная физика. Носителями заряда в опытах были электроны, которые вылетали из подогреваемого катода. Напомним, что самые интересные особенности поведения тока между электродами (катодом и анодом) наблюдались в этих экспериментах при разности потенциалов этих электродов кратной 4,9 В.
При разнице потенциалов большей указанной величины из колбы с парами ртути излучался свет с характерной длиной волны 253,5 нм. Выводы (правильные, конечно) о роли упругих и неупругих соударений электронов с атомами газа делаются в стиле «верьте мне люди», хотя «верить» как раз и не хочется, а проверить весьма желательно.
Попробуем восполнить некоторые пробелы.
Кванты света с длиной волны 253,5 нм, соответствуют переходам атомов ртути между основным и первым возбужденным состоянием. Энергия этих квантов 4,93 эВ как раз равна работе электрического поля при перемещении электрона от катода к аноду. Однако электроны движутся через газ, при этом столкновения с атомами и, соответственно, потери кинетической энергии неизбежны. В описываемых экспериментах пары ртути внутри колбы имели давление порядка 1 мм ртутного столба (около 100 Па). Такое давление достигается у насыщенных паров ртути при температуре 387К (~ 400К). Этому давлению и такой температуре соответствует концентрация атомов ртути в стеклянной колбе равная:

$$n = \frac{P}{kT} \approx 2 \times 10^{22} \left(\frac{1}{м^3} \right).$$

Тепловые скорости атомов ртути во много раз меньше скоростей, с которыми движутся электроны в газе, поэтому при рассмотрении столкновений можно считать атомы ртути почти покоящимися. При радиусе атомов ртути r равном примерно 1,57 Ангстрема (данные из справочника «Физические величины») длина свободного пробега электрона, который мы будем рассматривать как точечную частицу, составляет:

$$\lambda = \frac{1}{\pi n r^2} \approx 0.6 мм.$$

Ясно, что электроны, проходя между электродами, расположенными на расстоянии D порядка 0,1 *м*, испытывают множество столкновений с атомами, причем число столкновений N, длина свободного пробега λ и расстояние D, на которое сместился электрон, связаны примерным соотношением:

$$\lambda^2 N \approx D^2$$

Отсюда $N \approx 2 \times 10^4$!!!
При каждом упругом столкновении электрон теряет часть своей кинетической энергии. Наибольшая потеря энергии имеет место в случае так называемого лобового столкновения – при этом переданная атому ртути доля энергии составляет:

$$\frac{E_{Hg}}{E_e} = \frac{4mM}{(M+m)^2} \approx \frac{4m}{M}.$$

Молярная масса ртути 200 г/моль и электрон значительно легче нуклона (почти в 2000 раз). В среднем при большом количестве столкновений передается половина от этой доли или:

$$2m/M \approx 5 \times 10^{-6}.$$

Ясно, что если даже все 20 тысяч столкновений электрона с атомами произойдут при кинетической энергии близкой к 4,9 эВ, то будет потеряно только:

$$\frac{2mD^2}{M\lambda^2} \approx 0.13$$

То есть примерно 13% энергии.

Однако большинство из этих 20 тысяч столкновений происходит, когда электрон имеет значительно меньшую энергию.

Имеет смысл оценить потери энергии с большей точностью.

Для этого предположим, что упорядоченное смещение электронов обеспечивается за время их «свободных полетов» от одного соударения с атомом ртути до следующего. Время такого движения *t* определяется скоростью электрона *V*, которая после каждого соударения совсем немного уменьшается по величине и поворачивается на некоторый угол. Углы поворота после удара – это случайные величины, поэтому после очередного удара электрон теряет в среднем свою «упорядоченную скорость» *v*.

Связь между упорядоченной составляющей скорости и неупорядоченной дается соотношением:

$$v = \frac{eE\lambda}{2mV}.$$

Здесь $\boldsymbol{E}$ – это напряженность электрического поля.

Изменение кинетической энергии электронов происходит за счет их упорядоченного перемещения в электрическом поле и за счет их столкновений с атомами:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mV^2}{2}\right) = \frac{mVdV}{dt} = eEv - \frac{2m}{M}\times\frac{V}{\lambda}\times\frac{mV^2}{2} = \left(eE\right)^2\frac{\lambda}{2mV} - \frac{m^2V^3}{\lambda M}.$$

Разделив правую и левую части уравнения на модуль импульса *mV*, получим непростое дифференциальное уравнение:

$$\frac{dV}{dt} = \left(eE\right)^2\frac{\lambda}{2m^2V^2} - \frac{mV^2}{\lambda M}.$$

Из этого уравнения можно легко получить, например, установившееся среднее значение неупорядоченной скорости движения электронов через газ, но это значение в опытах Франка и Герца не достигается. Это означает, что второе слагаемое в правой части уравнения в течение всего времени движения электрона от катода к аноду остается значительно меньше первого. В грубом приближении можно это второе слагаемое отбросить, тогда уравнение упрощается:

$$\frac{dV}{dt} \approx \left(eE\right)^2\frac{\lambda}{2m^2V^2},$$

и можно найти его решение:

$$V^2dV = d\left(\frac{V^3}{3}\right) = \left(eE\right)^2\frac{\lambda}{2m^2}dt,$$

$$V^3 = \left(eE\right)^2\frac{3\lambda}{2m^2}t + const.$$

$$const = 0$$

Очевидно, что константа в правой части должна быть равна нулю, так как сразу после вылета из катода скорость электронов определяется температурой катода, которая значительно меньше, чем величина 4,93 эВ/k ≈ 60000 К.

Для модуля неупорядоченной скорости движения электрона и для его кинетической энергии получаются выражения:

$$V=\left[\left(eE\right)^2\frac{3\lambda}{2m^2}t\right]^{\frac{1}{3}}.$$

$$\frac{mV^2}{2}=\frac{1}{2}\left[\left(eE\right)^2\frac{3\lambda}{2m^{\frac{1}{2}}}t\right]^{\frac{2}{3}}.$$

Интересная степенная зависимость этих величин от времени!
За время движения от катода к аноду T электрон перемещается на расстояние D, следовательно, найти это время T можно, решив уравнение:

$$\int_0^T vdt=D.$$

$$\int_0^T\frac{eE\lambda}{2mV}dt=D.$$

$$\int_0^T\frac{eE\lambda}{2m\left[\left(eE\right)^2\frac{3\lambda}{2m^2}t\right]^{\frac{1}{3}}}dt=D.$$

$$T^{\frac{2}{3}}=\frac{4Dm}{3eE\lambda}\left[\left(eE\right)^2\frac{3\lambda}{2m^2}\right]^{\frac{1}{3}}.$$

$$T=\left(\frac{4Dm}{3eE\lambda}\right)^{\frac{3}{2}}\left[\left(eE\right)^2\frac{3\lambda}{2m^2}\right]^{\frac{1}{2}}=\frac{2^{\frac{5}{2}}D^{\frac{3}{2}}m^{\frac{1}{2}}}{3\left(eE\right)^{\frac{1}{2}}\lambda}.$$

Отсюда для приобретенной электроном кинетической энергии, связанной с неупорядоченной скоростью, получаем ожидаемое выражение: *eED*. Действительно, так и должно было получиться, ведь мы пренебрегли потерями кинетической энергии при ударах электронов об атомы ртути.
Чтобы отыскать неупорядоченную скорость движения электронов, которую они приобретают за найденное время более точно, нужно теперь учесть отброшенное раньше слагаемое. Представим скорость в виде двух частей (V+Y). Здесь V – это найденная уже зависимость скорости от времени в упрощенном варианте, а Y – небольшая добавка к ней.

$$\frac{d\left(V+Y\right)}{dt}=2\left(eE\right)^2\frac{\lambda}{m^2\left(V+Y\right)^2}-\frac{m\left(V+Y\right)^2}{\lambda M}.$$

Отбрасывая малые члены пропорциональные величине Y^2, получим для Y уравнение:

$$\frac{dY}{dt}=-B\frac{Y}{V^3}-CV^2.$$

Здесь буквами B и C обозначены выражения:

$$B=\frac{4e^2E^2\lambda}{m^2}+\frac{m}{\lambda M}2V,$$

$$C=\frac{m}{\lambda M}.$$

Оставим в правой части уравнения для Y только второе слагаемое:

$$\frac{dY}{dt}\approx-CV^2.$$

Для V решение нами уже получено, отсюда следует:

$$Y = -\int_0^T \frac{m}{\lambda M}\left[\left(eE\right)^2 \frac{3\lambda}{2m^2} t\right]^{\frac{2}{3}} dt = -\frac{3}{5}\left(\frac{2^{\frac{5}{2}} D^{\frac{3}{2}} m^{\frac{1}{2}}}{3\left(eE\right)^{\frac{1}{2}} \lambda}\right)^{\frac{5}{3}} \frac{m}{\lambda M}\left[\left(eE\right)^2 \frac{3\lambda}{2m^2}\right]^{\frac{2}{3}}.$$

Величина $\frac{2Y}{V}$ пропорциональна доле кинетической энергии, потерянной при столкновениях.

$$\frac{2Y}{V} = \frac{2}{\sqrt{\frac{2eED}{m}}} Y = -\frac{3}{5}\left(\frac{2^{\frac{5}{2}} D^{\frac{3}{2}} m^{\frac{1}{2}}}{3\left(eE\right)^{\frac{1}{2}} \lambda}\right)^{\frac{5}{3}} \frac{2}{\left(\frac{2eED}{m}\right)^{\frac{1}{2}}} \frac{m}{\lambda M}\left[\left(eE\right)^2 \frac{3\lambda}{2m^2}\right]^{\frac{2}{3}} = -\frac{4D^2 m}{5\lambda^2 M} \approx 0.052.$$

Ну, что же, более точная оценка дает примерно 5% потерь энергии вместо 13% - мы, собственно, и предполагали, что первоначальная оценка была весьма грубой и доля потерь на самом деле в несколько раз меньше.
Полученные соотношения позволяют оценить время «путешествия» электронов от катода к аноду. Для уже определенных условий, когда $eED \approx 4{,}9$ эВ; $D \approx 0{,}1$ м и $\lambda \approx 6\times10^{-4}$ м, получается время задержки с момента вылета электрона из катода до момента достижения анода равное примерно 34 микросекундам. Такое большое время можно вполне зарегистрировать с помощью даже не очень прецизионной техники. Например, можно сделать катод, покрытый цезием и с помощью импульсного лазера за весьма короткое время порядка 1 микросекунды формировать «группу» электронов, покинувших катод. Ультрафиолетовое излучение из установки начнет появляться с задержкой, причем временная зависимость интенсивности излучения будет, скорее всего, представлять собой широкий импульс, длительность которого сравнима со временем задержки.
Может быть, такой эксперимент уже проводился, но мне об этом не известно. Если читатели встречали в литературе описание аналогичных экспериментов, то я призываю их поделиться информацией со своими коллегами.
С. Варламов
2004-05-29