«Исправленный» закон Кулона

Как известно, в законе Кулона присутствует оговорка: размеры заряженных тел должны быть значительно меньше расстояния между телами, чтобы тела можно было считать точечными. Как изменится вид зависимости силы взаимодействия двух заряженных тел, если учесть их «неточечность», то есть принять во внимание их «объемность»?
Рассмотрим взаимодействие двух проводящих тел с объемами V_1 и V_2, на которых имеются электрические заряды Q и q, и расстояние между ними L гораздо больше, чем $(V_1)^{1/3}$ и $(V_2)^{1/3}$. Так как расстояние большое, то можно считать, что каждое из тел с отличным от нуля объемом находится в поле, созданном другим заряженным телом, находящимся достаточно далеко. То есть в первом приближении внешнее поле для каждого объемного тела можно рассматривать как поле, созданное расположенным далеко точечным зарядом. В соответствии с принципом суперпозиции можно найти силы взаимодействия в случаях, когда одно тело заряжено, а другое нет, и получить силы их притяжения друг к другу, а затем добавить взаимодействие (Кулоновское заряженных точек) в случае, когда заряды этих тел не равны нулю. В результате получится хорошее приближение к истине.
Ожидаемая зависимость должна представляться в виде суммы (суперпозиции) нескольких слагаемых:

$F(L, Q, q, V_1, V_2) = KqQ/L^2 + F_1(L, Q, V_2) + F_2(L, q, V_1) + \ldots$

Здесь многоточием обозначены слагаемые, величины которых значительно меньше, чем величины тех слагаемых, которые выписаны символами.
Поскольку тела проводящие, то на их поверхностях заряды будут располагаться так, что напряженность электрического поля внутри этих тел будет равна нулю. Поэтому распределения зарядов на поверхностях тоже подчиняются принципу суперпозиции.
При поиске выражения для $F_1(L, Q, V_2)$ второе тело (незаряженное) можно мысленно разрезать на множество пластинок, плоскости которых перпендикулярны линии, соединяющей центры двух тел. Затем можно вычислить силу, действующую только на одну уединенную пластинку. А затем снова мысленно собрать все пластинки вместе и сложить результат действия точечного заряда Q на всё множество пластинок вместе.
Одна незаряженная пластинка с толщиной d и площадью S приобрела дипольный момент P, направленный вдоль линии, соединяющей точечный заряд с телом, и равный по величине:

$P = QdS/(4\pi L^2) = E_1 \times dS/(4\pi K)$

Видно, что этот дипольный момент пропорционален объему пластинки Sd. Суммарный дипольный момент всех вместе пластинок, на которые мы мысленно разрезали тело №2, равен:

$P_2 = QV_2/(4\pi L^2) = E_1 \times V_2/(4\pi K)$

В поле $E_1 = KQ_1/L^2$ точечного заряда №1 этот дипольный момент имеет потенциальную энергию:

$W_1 = - P_2 \times E_1 = - V_2/(4\pi K) \times [KQ_1/L^2]^2$

Сила взаимодействия (притяжения) равна:

$F_1 = - dW/dL = V_2 K\, Q^2/(\pi\, L^5)$

Аналогично получим выражение для силы, которую испытывает тело №1 за счет того, что на нем перераспределяются заряды, и это связано с наличием внешнего поля, созданного телом №2:

$F_2 = V_1 K\, q^2/(\pi\, L^5)$

Если считать, что дипольный момент на одном теле создает в месте расположения другого тела электрическое поле, в котором находится дипольный момент другого тела, то возникает дополнительная энергия взаимодействия:

$W_{21} = 2KP_2P_1/L^3 = 2K \times V_1 \times V_2/(4\pi) /L^7$

И соответствующая этой дополнительной энергии сила отталкивания равна:

$F_{21} = 14KQqV_1 \times V_2 \times/[L^8(4\pi)^2]$

Понятно, что эта дополнительная сила уже пренебрежимо мала, так как зависит от расстояния, как $1/L^8$.

Итак, получаем :

$F(L, Q, q, V_1, V_2) = KqQ/L^2 – V_2KQ^2/(\pi L^5) – V_1Kq^2/(\pi L^5) + (7/8) \times KQqV_1V_2/[\pi^2L^8] + \ldots$

Какого порядка слагаемые мы обозначили многоточием?

Учтем, что каждое тело находится в поле, которое создано неточечным зарядом, и заряды на телах перераспределяются. Созданный на теле №2 дипольный момент P_2 создает в месте расположения тела №1 электрическое поле:

$E_{21} = 2KP_2/L^3 \approx 2KQV_2/(4\pi L^5)$

Это поле при учете объемности первого тела создаст в этом первом теле дипольный момент, который по величине пропорционален полю:

$P_{21} = [V_1/(4\pi K)] \times 2KQV_2/(4\pi L^5)$

Потенциальная энергия (дополнительная) равна:

$W_{21} = – P_{21} \times E_{21} = – [V_1/(4\pi K)] \times (E_{21})^2 = – [V_1/(4\pi K)] \times [2KQV_2/(4\pi L^5)]^2 =$

$= V_1(V_2)^2 \times KQ^2 /[\pi (4\pi L^5)^2]$

Дополнительная сила взаимодействия (притяжения) равна:

$F_{221} = – dW_{21}/dL = 10 \times V_1(V_2)^2 \times KQ^2/[\pi^3 4^2 L^{11}]$

И аналогично для обратного влияния:

$F_{112} = 10 \times V_2(V_1)^2 \times Kq^2/[\pi^3 4^2 L^{11}]$

Таким образом, слагаемые обозначенные многоточием, зависят от расстояния как $1/L^{11}$. Ими, естественно, можно пренебречь.

Если в полученной формуле для силы взаимодействия последнее слагаемое, пропорциональное $1/L^8$, ввиду его малости не учитывать, то получается «уточненный» закон Кулона для взаимодействия двух неточечных проводящих заряженных тел при условии, что расстояние L между ними гораздо больше, чем $(V_1)^{1/3}$ и $(V_2)^{1/3}$:

$$F(L, Q, q, V_1, V_2) \approx KqQ/L^2 – V_2KQ^2/(\pi L^5) – V_1Kq^2/(\pi L^5)$$

Если предположить, что заряды тел имеют один знак, то есть $q/Q>0$, и что заряд q не равен нулю, и при этом зафиксировать все параметры за исключением только одного: Q, то получается зависимость силы взаимодействия от величины заряда, которая выглядит весьма необычно, а именно, при малых величинах заряда Q сила взаимодействия соответствует притяжению тел, при больших Q тела тоже притягиваются, и только в некотором диапазоне значений Q тела отталкиваются ☺. В частности, если на телах заряды одинаковые Q=q, то с учетом неравенства $L^3 >> V_1, V_2$ тела обязательно отталкиваются.

Отсюда, собственно и возникла задача:

Два одинаковых проводящих шара находятся в вакууме на некотором расстоянии друг от друга. На них имеются электрические заряды Q и q ($Q > q$), и сила электростатического взаимодействия шаров равна нулю. Какой дополнительный заряд Δq следует поместить на шар с меньшим начальным зарядом, чтобы и в этом случае сила взаимодействия шаров была равна нулю?

Читатели её решат, надеемся, самостоятельно.

Решение: Поскольку при данном расположении одинаковых проводящих шаров суммарная сила взаимодействия равна нулю при определенном отношении величин зарядов, а именно при отношении Q/q, то при том же расположении шаров суммарная сила вновь будет равна нулю, если отношение зарядов будет в точности таким же: $(\Delta q +q)/Q = Q/q$. Отсюда следует $\Delta q=Q^2/q-q$

С. Варламов