2010 г. сентябрь — октябрь *т. 65, вып. 5 (395)*
УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

УДК 512.54+512.54.0+512.543

Светлой памяти
Анатолия Ивановича Мальцева

Проблема Бернсайда и связанные с ней вопросы

С. И. Адян

Статья посвящена обзору результатов, связанных с известной проблемой Бернсайда о периодических группах. Отрицательное решение этой проблемы было впервые опубликовано в серии совместных статей П. С. Новикова и автора в 1968 г. Созданная в этих работах теория преобразований слов в свободных периодических группах и ее различные модификации являются наиболее продуктивным подходом в исследованиях трудных проблем теории групп. В 1950 г. от проблемы Бернсайда отпочковалась другая проблема, относящаяся к конечным периодическим группам, которую сформулировал В. Магнус под названием "Restricted Burnside problem". Мы называем эту проблему проблемой Бернсайда–Магнуса. Если в проблеме Бернсайда вопрос ставился о локальной конечности периодических групп данного периода, то в проблеме Бернсайда–Магнуса речь идет о существовании максимальной конечной группы $R(m,n)$ фиксированного периода n с данным числом порождающих m. Эти проблемы как бы дополняют друг друга.

Публикация в 1987 г. в совместной работе автора и А. А. Разборова первого эффективного доказательства известного результата А. И. Кострикина о существовании групп $R(m,n)$ при простых n с указанием примитивно рекурсивной оценки порядков этих групп явилась толчком для активизации исследований и по этой проблеме. Вскоре появились и другие эффективные доказательства этого результата, а затем Е. И. Зельманов распространил этот результат на случаи, когда n есть степень простого числа. Этим исследованиям посвящен последний раздел статьи.

Библиография: 105 названий.

Ключевые слова: проблема Бернсайда, бесконечные периодические группы, тождества в группах, периодические слова, лиевы алгебры, проблема Бернсайда–Магнуса, условие Энгеля.

Содержание

1. Исторический очерк 6
2. Краткое описание теории Новикова–Адяна и первые результаты 14
3. Другие свойства свободных периодических групп нечетного периода . . 24

Работа выполнена при поддержке РФФИ и программы "Ведущие научные школы".

4. Независимые системы групповых тождеств . . . 28
5. Конечно порожденные некоммутативные аналоги группы рациональных чисел . . . 30
6. Периодические произведения групп . . . 32
7. Некоторые результаты других авторов . . . 39
8. Проблема Бернсайда–Магнуса, эффективные оценки . . . 49
Список литературы . . . 54

1. Исторический очерк

Всякая конечная группа удовлетворяет тождественному соотношению вида $x^n = 1$, где в качестве n можно взять порядок этой группы. Естественно возникает вопрос о верности обратного утверждения, т. е. будет ли локально конечной группа, удовлетворяющая такому тождеству. Эта проблема была поставлена в 1902 г. известным английским ученым У. Бернсайдом в следующей форме (см. [1]):

Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_m$ – конечное число независимых элементов, порождающих группу G, в которой для любого элемента x выполнено соотношение $x^n = 1$, где n – данное целое число. Будет ли определенная таким образом группа конечной, и если да, то каков ее порядок?

Впоследствии группы, задаваемые m порождающими и тождественным соотношением $x^n = 1$, получили название “*свободные бернсайдовы группы ранга m и экспоненты n (или периода n)*”. Они обозначаются через

$$B(m,n) \rightleftharpoons \langle a_1, a_2, \ldots, a_m;\, x^n = 1\rangle. \tag{1}$$

В статье [1] Бернсайд также отметил, что пока остается открытым более общий вопрос о локальной конечности любой периодической группы. Этот вопрос получил название: “*обобщенная проблема Бернсайда*”.

Положительный ответ на основной вопрос Бернсайда до сих пор удалось получить только для очень малых значений экспоненты n. Сам Бернсайд в статье [1] доказал конечность групп $B(m,n)$ для любого числа порождающих m и $n \leqslant 3$, а также конечность $B(2,4)$. В работе [2] И. Н. Санов доказал конечность при $n = 4$ для любых m. Наконец, в 1958 г. Маршалл Холл доказал конечность для $n = 6$ и любых m (см. [3]).

В 1905 г. Бернсайд доказал, что периодические линейные группы данного периода n локально конечны при любом n (см. [4]).

В 1911 г. И. Шур усилил результат Бернсайда о линейных группах, распространив его на любые периодические линейные группы без ограничения на периоды элементов (см. [5]).

Проблема Бернсайда привлекала внимание выдающихся алгебраистов многих стран в силу естественности и максимальной простоты своей постановки. Возникли различные варианты этой проблемы для разных типов алгебраических систем, А. Г. Курош даже ввел в обиход термин “проблема бернсайдовского типа” (см. [6]). Однако сама проблема Бернсайда в ее первоначальной формулировке оставалась открытой в течение многих десятилетий. Составленная М. Ньюманом в 1980 г. библиография [7], состоящая из работ, связанных с проблемой Бернсайда, содержала более 200 наименований.

Отрицательный ответ на основной вопрос Бернсайда был впервые получен в совместной работе П. С. Новикова и С. И. Адяна, которая была опубликована в 1968 г. в серии совместных статей двух авторов [8]. В этих статьях была доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Для любого нечетного периода $n \geqslant 4\,381$ и любого числа порождающих $m > 1$ свободная периодическая группа $B(m,n)$ бесконечна.*

Для доказательства этого результата авторами была построена теория преобразований периодических слов, которую можно рассматривать как далеко идущее обобщение теории малых сокращений, применимое к системам определяющих соотношений, содержащих достаточно длинные периодические слова. Характерной особенностью теории является то, что в ней большое число взаимосвязанных утверждений доказывается совместной индукцией по натуральному параметру α, называемому рангом. В результате индуктивного доказательства получается задание группы $B(m,n)$ с помощью некоторой системы определяющих соотношений, классифицированных по рангам.

Учитывая сложность теории, опубликованной в совместных работах 1968 г., я посвятил еще семь лет работе над дальнейшим усовершенствованием этой теории и расширением возможностей ее приложений. В результате этой работы в 1975 г. была опубликована монография [9], в которой текст первоначального доказательства сделан более доступным для читателя. Там же были изложены многочисленные новые приложения созданного метода. В частности, было доказано следующее усиление теоремы 1.

Теорема 2. *Для любого нечетного периода $n \geqslant 665$ и любого числа порождающих $m > 1$ свободная периодическая группа $B(m,n)$ бесконечна.*

Так как свободная бернсайдова группа $B(m,n)$ является факторгруппой групп $B(m,nk)$ при любых $k > 1$, то теорема 1 верна также для четных периодов, имеющих нечетный множитель $n \geqslant 665$.

В книге [9] созданная теория была представлена как мощный метод построения новых групп с наперед заданными свойствами. О многочисленных приложениях этого метода мы расскажем ниже в соответствующих разделах. А пока заметим, что $n = 665$ до сих пор остается наименьшим значением периода, для которого удалось доказать бесконечность свободной бернсайдовой группы $B(m,n)$.

Один из создателей комбинаторной теории групп, выдающийся американский алгебраист В. Магнус, который много лет сам занимался проблемой Бернсайда и внес существенный вклад в развитие многих идей, связанных с этой проблемой, в совместной с Б. Чандлером книге 1982 г., посвященной истории комбинаторной теории групп, ставит проблему Бернсайда на первое место среди работ по теории абстрактных групп, которые привели к важным достижениям (см. [10; гл. I.6, с. 57]). Авторы отмечают: **“Хотя все еще остается**

много открытых вопросов, самая трудная часть проблемы Бернсайда была решена: С. И. Адян и П. С. Новиков доказали, что группа $B(n, e)$ **бесконечна для всех** $n \geqslant 2$ **и нечетных** $e \geqslant 665$”.

Возвращаясь к этой же теме, в [10; гл. II.7, с. 165] Магнус добавляет:

“***Проблема Бернсайда явилась катализатором в исследованиях по теории групп аналогично ‘Великой теореме Ферма’ в теории чисел. Проблема с весьма простой формулировкой, которая оказывается крайне трудной для решения, таит в себе нечто неотразимо притягательное для разума математика***”.

Здесь Магнус попал в точку. Именно такие ощущения вдохновляли меня, когда я в 60-е годы работал над завершением доказательства нашего результата. Никакие награды не могут сравниться с тем удовлетворением и просто “триумфом”, которые ощущает математик, когда для успешного решения достаточно просто формулируемой трудной задачи удается построить цельную теорию, включающую в себя несколько десятков утверждений, доказываемых сложной совместной индукцией. Многие из этих утверждений были добавлены в создаваемую теорию в процессе работы, так как без них теория оказывалась неполной и индуктивное доказательство основных утверждений не удавалось завершить.

Читателю, наверное, будет интересно узнать мнение П. С. Новикова о нашей совместной работе. Приведем фотокопию рукописного оригинала его отзыва. Вот что написано в этом отзыве:

“*Последняя серия работ, которые принадлежат Сергею Ивановичу совместно со мной, по моему мнению является крупным вкладом в русскую науку, и роль Сергея Ивановича в этой работе была решающей.*

В основании этих работ лежит труд, посвященный известной алгебраической проблеме Бернсайда, поставленной в 1902 году. Проблема Бернсайда в своей самой значительной для алгебры форме и, как оказалось, самой трудной, представляет собой вопрос: будет ли группа с конечным числом образующих и удовлетворяющая тождеству $x^n = 1$ **конечной?**

Справедливость этого утверждения для $n = 3$ *доказал сам Бернсайд. Санов доказал то же самое для* $n = 4$*, и, наконец, Маршалл Холл доказал конечность группы для* $n = 6$.

Я начал работу по проблеме Бернсайда и в 1959 г. опубликовал в ДАН заявление, что для $n \geqslant 72$ *группы бесконечны. После, когда я начал подготовку к печати, то обнаружилось, что мои методы мне не удается довести до конца, и [я] привлек к сотрудничеству Сергея Ивановича Адяна. Он внес в методы и технику этого труда настолько, что преодолел те трудности, перед которыми я остановился, и те новые трудности, которые возникали в процессе работы. В результате в настоящем году работа появилась в печати.*

При этом оказалось, что был потерян четный случай числа n *и значительно увеличилась константа, начиная с которой свободная периодическая группа бесконечна. Созданные методы сразу же обнаружили свою силу, и при их помощи удалось доказать, что для достаточно больших нечетных* n *группа*

Отзыв П.С.Новикова о совместной работе (1968 год)

Последняя серия работ, которые принадлежат Сергею Ивановичу совместно со мной, по моему мнению является крупным вкладом в русскую науку и роль Сергея Ивановича в этой работе была решающей.
В основании этих работ лежит труд, посвященный известной алгебраической проблеме Бернсайда, поставленной в 1902 году. Проблема Бернсайда в своей наиболее значительной форме для алгебры формул и как одна из наиболее трудных ~~[illegible]~~ представляет собой вопрос: будет ли группа с конечным числом образующих и удовлетворяющая тождеству $x^n = 1$ конечной.
Справедливость этого утверждения для $n=3$ доказал сам Бернсайд. Санов доказал то же самое для $n=4$ и наконец Маршалл Холл доказал конечность группы для $n=6$. Я начал работу по проблеме Бернсайда и в 1959 году опубликовал в ДАН заявление, что для $n \geq 72$ группа бесконечна.
Но когда я начал подготовку к печати, то обнаружилось, что мои методы [illegible] не доходят до конца и привлек к сотрудничеству Сергея Ивановича Адяна. Он внес в методы и технику этого труда настолько, что преодолел те новые трудности, из-за которых я остановился, и те которые возникли в процессе работы.
В результате, в настоящем году работа появилась в печати. ~~[illegible]~~
~~обнаружил свою силу. [illegible]~~
При этом оказалось что была понижена четкость числа n и значительно улучшилась [illegible] свободная периодическая группа бесконечна.
Созданный метод сразу же обнаружил свою силу и при его помощи удалось не только доказать, что для достаточно больших нечетных n группы не только бесконечны, но не могут быть определены конечным числом определяющих соотношений, и решить проблему тождеств и проблему сопряженности в свободной периодической группе, — а также наконец была решена второе известная алгебраическая проблема. Было доказано, что существуют бесконечные группы, каждая коммутативная подгруппа которых конечна.
На основании сказанного я считаю, что Сергей Иванович Адян вполне достоин кандидатуры на звание члена-корреспондента АН СССР.

Академик П. Новиков

(* * *)

Подп. Новикова П.С.
[illegible]

не только бесконечна, но не может быть задана конечным числом определяющих соотношений. Решены проблема тождества и проблема сопряженности для свободных периодических групп и, наконец, была решена вторая известная алгебраическая проблема. Было доказано, что существуют бесконечные группы, каждая коммутативная подгруппа которых конечна.

Академик П. Новиков"

В 1950 г. В. Магнус в работе [11] сформулировал еще одну проблему, которая тесно связана с проблемой Бернсайда.

Суть ее заключается в том, чтобы, не дожидаясь решения основного вопроса Бернсайда о бесконечности свободной бернсайдовой группы $B(m,n)$, исследовать для данной пары чисел (m,n) вопрос:

Существует ли максимальная конечная периодическая группа с m порождающими и периодом n, т. е. имеет ли группа $B(m,n)$ максимальную конечную факторгруппу?

В случае, когда она существует, требовалось найти или оценить ее порядок. Такая гипотетическая группа получила обозначение $R(m,n)$. Магнус назвал эту проблему "**Restricted Burnside problem**".

В той же работе [11] Магнус установил, что при простых $n=p$ вопрос о существовании максимальной конечной периодической группы $R(m,p)$ сводится к вопросу о локальной нильпотентности алгебры Ли над полем Z_p, удовлетворяющей так называемому тождеству Энгеля E_{p-1}:

$$[xy^{p-1}] = [\dots[[x,\underbrace{y],y],\dots,y]}_{p-1 \text{ раз}} = 0. \tag{2}$$

Доказательство этого свед́ения было включено также в книгу [12] (см. в [12] теорему 5.23). В 1952 г. И. Н. Санов, обсуждая и комментируя работу [11], неточно перевел термин Магнуса "Restricted Burnside problem" на русский язык как "*ослабленная проблема Бернсайда*" (см. [13]).

По-видимому, этот термин был навеян Санову тем соображением, что если бы при данных m и n свободная бернсайдова группа $B(m,n)$ была конечна, то она бы и была максимальной конечной периодической группой $R(m,n)$. На самом деле, как было установлено позже в работе [14], свободные периодические группы $B(m,n)$ при достаточно больших нечетных периодах n не только бесконечны, но они имеют бесконечное число неизоморфных бесконечных факторгрупп, даже при простых периодах $n=p$. Так что называть эту проблему ослабленной проблемой Бернсайда некорректно с математической точки зрения.

Исследованием так называемой "ослабленной проблемы Бернсайда" с применением подхода Магнуса занимались многие авторы. В России первые результаты в этом направлении были получены А. И. Кострикиным. В 1957 г. он опубликовал работу [15], в которой получил положительное решение поставленной Магнусом проблемы для периодов $n=5$ и $n=7$ при любом числе порождающих.

Весной 1959 г. в Математическом институте им. В. А. Стеклова состоялась защита докторской диссертации А. И. Кострикина, основное содержание которой составила работа [16], в которой доказывалось существование максимальных конечных групп $R(m, n)$ для любых простых периодов n. Именно во время этой защиты произошел эпизод, который сыграл очень важную роль в истории дальнейших исследований не только по поставленной Магнусом "Restricted Burnside problem", но и по самой проблеме Бернсайда. Чтобы подчеркнуть значимость обсуждаемого результата Кострикина, П. С. Новиков поделился с сидящим рядом с ним В. М. Глушковым своим убеждением в бесконечности свободной бернсайдовой группы $B(m, n)$ для достаточно больших периодов n. Это, безусловно, должно было повысить интерес к результату Кострикина. Отвечая на расспросы Глушкова, откуда он это взял, Петр Сергеевич признался, что уже второй год работает над этой проблемой и что у него есть некоторый план доказательства бесконечности свободных периодических групп для достаточно больших периодов.

Как оказалось, В. М. Глушков вскоре поделился полученной им информацией со своим бывшим научным руководителем А. Г. Курошем. Примерно через неделю после этого П. С. Новиков получил официальное письмо от А. Г. Куроша с просьбой прочитать доклад о проблеме Бернсайда на 2-й Всесоюзной алгебраической конференции, которая должна была состояться в МГУ в том же году. Я узнал об этом эпизоде от самого П. С. Новикова вскоре после получения им письма от Куроша. Петр Сергеевич сказал мне, что попал в "трудное положение". С одной стороны, у него не было желания делать официальный доклад на эту тему, так как текста доказательства у него не было, но с другой стороны, он был уверен в перспективности своих идей. Я сказал, что этот вопрос, конечно, надо решать ему самому, но при этом высказал свой оптимизм в возможности реализации его замысла. А. Г. Курош настаивал и П. С. Новиков примерно через месяц дал согласие прочитать такой доклад. Многие видные алгебраисты, в том числе А. Г. Курош и А. И. Мальцев, считали состоявшийся тогда доклад П. С. Новикова на 2-й Всесоюзной алгебраической конференции в МГУ с заявлением о возможности отрицательного решения проблемы Бернсайда крупной сенсацией в алгебраической науке. После доклада на конференции Петр Сергеевич решил опубликовать заметку в ДАН [17], в которой он кратко изложил наметки своего подхода к отрицательному решению проблемы Бернсайда с применением некоторого задуманного им обобщенного варианта теории малых сокращений В. А. Тартаковского с последующим применением известной леммы Туэ–Аршона о существовании бесконечной последовательности из двух букв, не содержащей вхождений кубов слов.

Как отмечал П. С. Новиков в приведенном выше отзыве, в связи с обнаружившимися при подготовке рукописи трудностями он в 1960 г. предложил мне продолжить вместе с ним работу по осуществлению намеченного им замысла.

По моему предложению мы вначале не афишировали наше сотрудничество, но примерно через год, когда стало ясно, что доказательство весьма далеко от завершения, Петр Сергеевич уже рассказывал своим друзьям и коллегам (А. И. Мальцеву, С. Н. Черникову и др.) о нашей совместной работе. Поэтому они регулярно обращались ко мне с вопросами о ходе нашей совместной работы. Особенно запомнились мне беседы с Анатолием Ивановичем Мальцевым на эту тему. Он всячески вдохновлял меня в этой работе, подчеркивая большую важность рассматриваемой проблемы. Я, конечно, обещал сделать все от меня зависящее, чтобы довести это дело до конца. Очень высокую оценку нашим результатам позднее дал также Курт Гёдель во время нашей встречи в Принстоне в 1975 г.

В 1964 г. мы с Петром Сергеевичем прочитали совместный доклад в Математическом институте им. В. А. Стеклова и официально объявили, что готовим большую совместную работу с доказательством бесконечности свободных бернсайдовых групп достаточно большого *нечетного* периода. В этом докладе мы описали схему индукции и подробно рассмотрели первый шаг сложной индукции, которая сопровождает построение нашей новой теории. Точная граница периодов, при которых наш подход работает, должна была определиться при завершении доказательства и подготовки статьи. Эту работу мы завершили к осени 1967 г., а в следующем году статья была опубликована в журнале "Известия АН СССР. Серия математическая".

Хотя П. С. Новиков опубликовал заметку в ДАН [17] под влиянием сложившихся тогда обстоятельств, я убежден, что ее публикация сыграла положительную роль в активизации нашей совместной работы над проблемой Бернсайда. Я не исключаю, что без этого анонсирования в ДАН у нас могло бы не быть того упорства, с которым мы работали в эти годы, а возможно, не было бы и самого результата. А так, надо было решить проблему любой ценой!

Следует отметить, что до 1959 г. алгебраисты практически думали лишь о положительном решении проблемы Бернсайда. И. Н. Санов в [13] даже говорил не о проблеме Бернсайда, а о "предложении Бернсайда", а А. Г. Курош в 1953 г. во втором издании своей монографии [18] (см. гл. X, § 38, с. 250) писал: "Эта проблема не поддается решению даже при условии, что порядки элементов ограничены в совокупности". Ясно, что здесь употребление слова "даже" означало, что автор предполагает положительный ответ на вопрос Бернсайда.

Не является случайным также и тот факт, что первый пример локально бесконечной периодической группы с неограниченными порядками элементов был построен Е. С. Голодом в работе [19] после публикации заметки [17] в ДАН. Позже выяснилось, что этот результат допускает весьма простое доказательство. Разными авторами были построены достаточно простые примеры бесконечных 2-групп, порождаемых двумя *автоматными преобразованиями двоичных кортежей* [20], бесконечных 2-групп, порождаемых тремя взаимно однозначными отображениями на себя отрезка (0,1) с выколотыми двоично-рациональными числами [21] и другие. В частности, подробное доказательство результата Григорчука из работы [21] занимает не более двух страниц (см. [22; теорема 4, с. 176–177]).

Некоторую путаницу в русскоязычную терминологию для различных версий проблемы Бернсайда о периодических группах внес А. Г. Курош в третьем издании книги [18]. В § Д.16, п. 1 (с. 497) этой книги он, вдохновленный замечательным результатом сотрудника его кафедры Е. С. Голода по обобщенной версии проблемы Бернсайда, заявляет, что проблема Бернсайда отрицательно решена Голодом в работе [19]. При этом он называет вопрос, поставленный Бернсайдом для групп, удовлетворяющих тождеству $x^n = 1$, "**ограниченной проблемой Бернсайда**", хотя сам же подчеркивает, что именно в этом виде Бернсайд формулировал сам свою проблему. Курош в этом месте забывает, что этот термин в английском языке "Restricted Burnside problem" был уже введен в 1950 г. Магнусом для сформулированной им другой проблемы.

Что же касается статьи 1902 г. [1], то там автор в первой фразе только мимоходом упоминает вопрос о *локальной* конечности любой периодической группы, не акцентируя на нем внимания. Внимательный читатель заметит, что в этой фразе Бернсайд нечаянно пропустил слово *локальной*.

С целью исправления созданной терминологической путаницы в 1987 г. мы с А. А. Разборовым предложили называть сформулированную Магнусом проблему проблемой Бернсайда–Магнуса (см. раздел 8). С нашей точки зрения это вполне естественно, учитывая роль Магнуса в постановке данной проблемы и разработке методов, которые в конце концов привели к ее решению. Во всяком случае предлагаемый нами термин, в отличие от предложения А. Г. Куроша, не был ранее использован другими авторами.

В пользу положительного ответа на основной вопрос Бернсайда косвенно говорил и упомянутый выше результат А. И. Кострикина 1959 г. о положительном ответе на поставленный Магнусом вопрос о существовании максимальной конечной группы среди всех групп данного простого периода p при фиксированном числе порождающих m, полное доказательство которого появилось значительно позже (см. [23]).[1]

О том, что в работе Кострикина [16] не было полного доказательства заявленного результата, мне стало известно только весной 1975 г. во время моего двухмесячного турне в США, когда я посетил ряд крупных научных центров, по приглашению американских коллег. На наличие ошибки в работе [16] первыми указали мне У. Бун и М. Судзуки из Иллинойсского университета в г. Урбане. При этом они ссылались на К. Ивасаву, который переписывался с А. И. Кострикиным на эту тему.

В конце своего турне в мае 1975 г. по приглашению Курта Гёделя я приехал в Принстон, где встретился с ним в Институте перспективных исследований и прочитал в Принстонском университете лекцию по проблеме Бернсайда. После лекции у меня была возможность поговорить с К. Ивасавой. Он сказал, что в 1970 г. лично писал Кострикину с указанием существенного пробела в статье [16], опубликованной в "Известиях". По его словам он только через 6 месяцев после своего запроса получил ответ от Кострикина, в котором содержался дополнительный текст на 10 страницах, по которому они так и не смогли убедиться в корректности доказательства Кострикина. Американские коллеги в Урбане даже пытались упрекнуть меня в "двойном стандарте", так как я, упоминая об ошибке в работе Дж. Бриттона [24], в своей лекции тогда ничего не сказал об ошибке в [16]. Мне пришлось признаться, что эту статью

[1] Следует признать, что после появления работы [23] статью [16] того же автора никто уже не цитирует без добавления [23], хотя при этом сам автор, как и главный эксперт по его работам Е. Зельманов, всегда старательно избегают в печати вопрос о наличии доказательства в первой статье [16].

я сам не проверял, а И. Р. Шафаревич, который в 1959 г. рекомендовал ее для публикации в “Известиях”, никогда ничего не говорил о существенном пробеле в доказательстве основного результата статьи [16].

По возвращении из США в Москву, я сообщил об этих разговорах в США А. И. Кострикину в присутствии С. П. Новикова. Кострикин тогда подтвердил, что было письмо от К. Ивасавы. Он сказал, что устранил пробел и собирается написать книгу с подробным доказательством. С целью устранения пробела, на который указывали читатели, Кострикин в 1979 г. опубликовал дополнительную статью [23] к работе [16]. Только через 10 лет после нашего разговора он представил в печать монографию [25], которую я рецензировал по просьбе издательства “Наука” (см. раздел 8). В книге [25] доказательство основного результата Кострикина является вполне убедительным, хотя оно, как и в статьях [16] и [23], проводится от противного и в принципе не может дать эффективной оценки для ступени нильпотентности и для порядков групп $R(m,p)$.

Первое конструктивное доказательство теоремы Кострикина с указанием рекурсивных верхних оценок было опубликовано в 1987 г. в моей совместной с А. А. Разборовым работе [26]. Это доказательство было создано нами в ответ на неоднократно высказанные автором книги [25] заявления, что эффективизация доказательства его теоремы с возможностью нахождения каких-то оценок сверху “пока недосягаема даже для сравнительно небольших n” (см. [25; п. 5.15 на с. 184, а также п. 5.3 на с. 142]). Через несколько лет после публикации работы [26] появились также эффективные доказательства Е. Зельманова и М. Воэн-Ли. Об эффективных доказательствах результата А. И. Кострикина в нашей работе [26] и в работах наших последователей, а также о возможных рекурсивных оценках ступени нильпотентности энгелевых лиевых алгебр и порядков максимальных конечных групп подробнее см. раздел 8.

Мы будем возвращаться к историческим вопросам, связанным с той или иной темой, в соответствующих разделах.

2. Краткое описание теории Новикова–Адяна и первые результаты

Характерной особенностью созданной в работе [8] теории является то, что основные утверждения этой теории, как и определения основных понятий, вводятся и доказываются совместной индукцией по натуральному параметру, который называется *рангом*. Для подготовки читателя в первой из этих статей был изложен фрагмент теории для ранга 1, т. е. первый шаг индукции, который был доложен в упомянутом выше совместном докладе 1964 г. Вторая статья, занимавшая целый номер журнала, была посвящена индуктивному переходу от ранга α к рангу $\alpha+1$, т. е. в ней утверждения для ранга $\alpha+1$ доказываются с перекрестными ссылками в предположении, что все они верны для ранга α. Это, конечно, создавало определенные трудности при чтении работы, так как читатель, имея дело с понятиями и утверждениями для ранга α, должен иметь возможность использовать по индуктивному предположению любое из рассматриваемых понятий для предыдущего ранга. При этом многие из этих понятий в общем виде появляются значительно позже, но для ранга 1 они все описаны в первой статье, т. е. в № 1 тома 32.

Учитывая сказанное, автор в течение ряда лет после публикации работы [8] продолжал работу над усовершенствованием созданной теории и особенно ее изложения. Только через семь лет была опубликована монография [9], в которой изложение было значительно упрощено, а сама теория была существенно усилена и обогащена новыми идеями. В частности, в книге [9] все определения вынесены в начало книги, а в конце книги помещен подробный предметный указатель, позволяющий читателю легко находить нужные определения, к которым он вынужден периодически обращаться при чтении индуктивного доказательства. Индукция в книге [9] начинается с ранга 0.

В монографии [9] граница нечетной экспоненты $n \geqslant 4\,381$ понижена до $n \geqslant 665$, а также изложены доказательства ряда новых результатов, которые были получены автором между 1968 и 1975 годами. Доказательство каждого из этих новых результатов потребовало существенного обогащения созданной в [8] теории новыми идеями.

В частности, в [9] изложены полученные автором в 1969 г. первые примеры бесконечных независимых систем групповых тождеств, которые дают решение известной проблемы конечного базиса теории групп (см. [9; гл. VII, § 2]). Подробнее об этом см. раздел 4.

Для доказательства этого результата потребовалось существенно модифицировать созданный метод. Было установлено, что если использовать в классификации не все периодические слова, а только те, которые нас интересуют для определенной цели, то, изменяя определения “допустимых” определяющих соотношений, можно с помощью аналогичной конструкции целенаправленно строить группы с наперед заданными свойствами.

В теории групп давно стоял открытый вопрос о существовании некоммутативных счетных групп без кручения с нетривиальным пересечением любых двух неединичных подгрупп. Такие группы можно считать некоммутативными аналогами аддитивной группы рациональных чисел. Положительное решение этого вопроса было впервые получено в 1971 г. в работе [27] с помощью еще одной модификации нашей теории. Здесь она впервые использовалась для построения групп без кручения. Этот результат также был изложен в [9] для нечетных периодов $n \geqslant 665$ (см. [9; гл. VII, § 1]). Используемые в этой конструкции определяющие соотношения не являются целиком периодическими словами, но содержат периодическую часть. Подробнее об этом см. раздел 5.

Позже было показано, что в нашу классификацию можно вовлекать также определяющие соотношения, которые не только не являются периодическими, но даже не содержат периодических подслов (см. [14]).

Можно сказать, что уже к середине 70-х годов созданная в [8] теория превратилась в некоторый *общий метод построения групп с наперед заданными свойствами.*

В работе [28] была построена новая операция умножения групп, называемая *периодическим произведением данного показателя* n, которая обладает основными свойствами классических операций свободного и прямого произведений групп, в частности, удовлетворяет так называемому *постулату А. И. Мальцева* (см., например, [18; § Д.11, п. 2, с. 475]). Этот постулат означает, что если в периодическом произведении H данного нечетного периода n в каждой компоненте выбрать по подгруппе, то эти подгруппы порождают в H периодическое произведение того же периода n для выбранных подгрупп. Тем самым было получено положительное решение известной *проблемы А. И. Мальцева о существовании операций умножения групп, удовлетворяющих постулату Мальцева.*

В работе [29] операция периодического произведения рассматривалась в предположении, что исходные группы G_i не содержат инволюций. Там был доказан критерий простоты периодических произведений, из которого выведены интересные результаты о бесконечных простых периодических группах нечетного периода. Сам критерий простоты основан на следующем интересном свойстве периодических произведений:

Если H есть периодическое произведение нечетного периода $n \geqslant 665$ семейства групп $\{G_i\}$, ни одна из которых не содержит инволюций, то для любого элемента $x \in H$, которое не сопряжено никакому элементу подгрупп G_i группы H, выполняется соотношение $x^n = 1$.

Подробнее об операции периодического произведения групп и о простоте периодических произведений см. раздел 6 настоящего обзора, а также статью [30], в которой устранен допущенный в [28] пробел в определении периодического произведения, относящийся к случаю, когда исходные группы содержат инволюцию.

Основные идеи теории Новикова–Адяна мы изложим здесь в усовершенствованной версии, которая опубликована в монографии [9].

Для этого фиксируем нечетный период $n \geqslant 665$ и два числовых параметра $p = 9$ и $q = 90$. Будем рассматривать несократимые слова в групповом алфавите

$$a_1, a_2, \dots, a_m, a_1^{-1}, a_2^{-1}, \dots, a_m^{-1} \qquad (m > 1). \tag{3}$$

Графическое равенство слов X и Y в алфавите (3) будем обозначать $X = Y$, а длину слова X – через $|X|$. Слово A в алфавите (3) называется *минимальным периодом ранга* 1, если A есть кратчайший период несократимого слова A^9, т. е. слово A циклически несократимо и не есть степень более короткого слова. Такие слова мы называем *простыми* словами. Если $t > 1$ и A – минимальный период ранга 1, то любое подслово E слова A^n, имеющее длину $|E| > (t-1)|A|$, назовем периодической *t-степенью ранга* 1 *с периодом* A. Если A – минимальный период ранга 1, то любой его циклический сдвиг B тоже есть минимальный период, который сопряжен A в свободной группе F_m с порождающими (3). При этом любая t-степень E ранга 1 с периодом A является t-степенью ранга 1 также относительно периода B. Каждая t-степень E ранга 1 имеет *левый и правый периоды* ранга 1, которые являются соответственно началом и концом слова E. Они могут отличаться только циклическим сдвигом.

Каждая t-степень E ранга 1 с левым периодом B имеет вид $E = B^{t-1}B'$, где B' есть непустое начало слова B. При этом правым периодом слова E будет циклический сдвиг периода B, который является концом слова E.

Пусть несократимое слово W имеет вид $W = PEQ$, где выделенное подслово E есть некоторая периодическая t-степень ранга 1. При этом слово E будем называть *основой* выделенного вхождения, а слова P и Q *левым и правым крылом* этого вхождения. Мы говорим, что выделенное вхождение периодической t-степени E *продолжаемо влево*, если слово P оканчивается буквой, совпадающей с последней буквой левого периода слова E. Следовательно, данное вхождение периодической t-степени E будет *непродолжаемо влево*, если слово P либо пусто, либо оканчивается буквой, отличной от последней буквы левого периода слова E. Аналогично определяются *продолжаемость* и *непродолжаемость вправо* данного вхождения периодического слова ранга 1. Вхождение периодической t-степени в данное слово назовем *максимальным вхождением*, если оно непродолжаемо ни влево, ни вправо. Очевидно, что для каждого вхождения PEQ периодической t-степени E в данное слово $W = PEQ$ однозначно находится его максимальное продолжение относительно данного минимального периода.

В основе доказательства бесконечности свободных периодических групп достаточно большого периода лежат две простые леммы о словах в алфавите свободной группы. Первая из них утверждает существование бесконечного слова в данном алфавите из двух (или трех) символов, которое не содержит подслов, являющихся кубами (соответственно квадратами). Она впервые была доказана А. Туэ в 1906 г. и передоказывалась многократно разными авторами.

Простейший пример бесконечной последовательности такого рода для свободной группы F_2 ранга 2 с порождающими a_1 и a_2 дает следующая лемма, которую мы приведем с доказательством.

Лемма 1. *В свободной группе с порождающими a_1 и a_2 можно указать бесконечную последовательность несократимых слов C_i, каждое из которых является началом следующего и не содержит квадратов слов.*

Доказательство. Искомые слова C_i при $i = 0, 1, 2, \ldots$ определим индукцией по i. Пусть

$$C_0 = a_1, \qquad C_1 = a_1 a_2 a_1^{-1}, \qquad C_{i+1} = C_i a_2 C_i^{-1} \text{ при всех } i > 1. \tag{4}$$

Сначала отметим следующие очевидные свойства слов C_i:

1) при любых $j < i$ слово C_j есть начало слова C_i;

2) каждое вхождение буквы a_2 в слово C_{i+1} является центром некоторого подслова C_j при $j \leqslant i+1$.

Индукцией по i докажем, что определенные нами слова C_i удовлетворяют утверждению леммы. Допустим, что $i+1$ есть минимальное число, при котором в слово C_{i+1} входит некоторое подслово вида EE, где E непусто. Пусть $C_{i+1} = PEEQ$. Очевидно, что центральная буква $\underline{a_2}$ слова C_{i+1} должна входить в подслово EE. В силу симметрии можем считать, что она входит во второй множитель E, т. е. при некоторых X и Y имеем $EE = Xa_2Y^{-1}X\underline{a_2}Y^{-1}$. Одно из слов X и Y должно быть концом другого. Так как слово C_{i+1} несократимо, то $|X| \neq |Y|$. Без ограничения общности можно считать, что $|X| < |Y|$.

Пусть $Y = uFu^{-1}X$, где F – непустое и циклически несократимое слово. Тогда имеем

$$C_{i+1} = PEEQ = PuFu^{-1}Xa_2X^{-1}uFu^{-1}X\underline{a_2}X^{-1}Q. \tag{5}$$

Если первая выделенная в (5) буква a_2 есть центр слова C_r, то $r < i$, так как F непусто и $F \neq F^{-1}$. Тогда C_{r-1} не может быть концом слова $u^{-1}X$, так как иначе слово C_{r-1}^{-1}, будучи концом той же длины слова C_i, было бы равно C_{r-1}. Следовательно, $u^{-1}X$ есть собственный конец слова C_{r-1}, т. е. C_{r-1} имеет конец $du^{-1}X$, где d – последняя буква слова F. Но это невозможно, так как тогда слово $X^{-1}ud^{-1}$ должно быть началом слова C_{r-1}^{-1}, а это невозможно в силу условия циклической несократимости слова F. Тем самым завершено доказательство леммы 1.

Вторая лемма, лежащая в основе нашей теории, также доказывалась многими авторами в разное время. Ее можно отнести к фольклору. Она оценивает сверху длину возможного пересечения двух вхождений периодических подслов в данное слово при условии, что они *не согласованы*, т. е. если эти подслова не являются фрагментами одного большого периодического подслова с общим периодом.

Лемма 2. *Если $A^tA' = B^rB'$ и $|A^tA'| \geqslant |A| + |B|$, где слово A' есть начало A, а слово B' есть начало B, то найдется такое слово D, что $A = D^k$ и $B = D^s$ при некоторых k и s.*

Доказательство. Можно считать, что $|A| \geqslant |B|$. Так как A есть начало слова B^rB', то $A = B^{r_1}B_1$, где $r_1 > 0$ и $B = B_1B_2$. Сократив исходное равенство слева на A, получим равенство $A^{t-1}A' = B_2B^{r-r_1-1}B'$, где слово B_2B_1 есть начало правой части. Следовательно, имеем

$$B_1B_2 = B_2B_1. \tag{6}$$

Нам остается доказать, что из равенства (6) следует, что слова B_1 и B_2 являются степенями некоторого слова D. Это утверждение докажем индукцией по длине слова B_1B_2. Можем считать, что $|B_1| \geqslant |B_2|$. Если B_2 пусто, то имеем $B_1 = B$ и $A = B^{r_1+1}$. Допустим, что B_2 не пусто и наше утверждение верно при $|B_1B_2| < j$. Докажем его при $|B_1B_2| = j$. Пусть $B_1B_2 = B_2B_1$. Тогда при некотором C имеем $B_1 = B_2C$ и $CB_2 = B_2C$. Из второго равенства по индуктивному предположению следует, что слова C и B_2 являются степенями некоторого слова D. Лемма 2 доказана.

Периодическими словами с данным циклически несократимым периодом A назовем любое слово вида A^k, где $k \geqslant 665$, а также все его подслова, длина которых больше $2|A|$. Множество всех периодических слов с периодом A будем обозначать через Пер(A). Если слово C есть циклический сдвиг слова A, то каждое периодическое слово E с периодом A есть периодическое слово с периодом C. Можно сказать, что для таких слов A и C множества Пер(A) и Пер(C) совпадают. Циклически несократимый период A назовем *минимальным периодом ранга* 1 слова A^n, если слово A^9 не является периодическим словом с более коротким периодом.

Минимальный период A ранга 1 называется *элементарным периодом ранга* 1, если в слово A^n не входит никакая 9-степень ранга 1 с периодом B, длина которой меньше $|A|$.

Если же в слово A^n входит некоторая 9-степень ранга 1 с периодом $|B|<|A|$, то A называется *периодом ранга* 2, а слово A^n называется *периодическим словом ранга* 2 *с периодом* A.

Из леммы 2 вытекает следующая лемма.

Лемма 3. *Если в периодическое слово A^n с минимальным периодом ранга 1 входит некоторая 9-степень E ранга 1 с периодом B длины меньше $|A|$, то $|E| < |A| + |B|$. Можно считать, что это вхождение 9-степени E не продолжаемо ни влево, ни вправо.*

Из леммы 3 непосредственно вытекает, что в периодическом слове A^n ранга 2 с минимальным периодом A максимальные вхождения периодических 9-степеней с более коротким периодом B будут расположены равномерно со сдвигом на один период друг относительно друга, если они не расположены с краю. В частности, если при этом $A^n = PEQ$, где $|P| > |A|$, то $P = P_1A_1$, где $|A_1| = |A|$ и в слове A^n имеется максимальное вхождение P_1EQ_1, которое получается из вхождения PEQ сдвигом влево на один период A. При $|Q| > |A|$ аналогично возникают сдвиги рассматриваемого вхождения PEQ вправо.

Для точного индуктивного определения понятий периода ранга α и элементарного периода ранга α индукцией по натуральному параметру α требуется попутно ввести определения ряда других понятий, связанных с рангом α. Приведем наиболее важные из них:

a) *ядро ранга α данного слова*;

b) *приведенное слово ранга α*;

c) *поворот ранга α*;

d) *отношение эквивалентности слов в ранге α*;

e) *взаимная нормированность двух вхождений в ранге α*;

f) *операция смыкания ранга α для данных двух слов*

и т. д.

Точные определения всех этих понятий можно найти в [9; гл. 1, § 4]. Здесь мы ограничимся лишь указанием некоторых существенных особенностей рассматриваемой системы понятий.

Допустим, что для рангов $i \leqslant \alpha - 1$ при $\alpha \geqslant 0$ уже определены следующие понятия.

1. *Приведенные слова ранга i*
   (множество всех таких слов обозначается через $\mathscr{R}_i$, причем, $\mathscr{R}_0$ есть множество всех несократимых слов в алфавите (3) и $\mathscr{R}_i \subset \mathscr{R}_{i-1}$ при всех $i \geqslant 1$).
2. *Ядра ранга $i < \alpha$ данного слова $X \in \mathscr{R}_i$*
   (ядрами ранга 0 слова X из $\mathscr{R}_0$ по определению являются все вхождения отдельных букв в слово X, а в общем случае это вхождения некоторых подслов в слово X).
3. *Элементарные периоды рангов $0 < i < \alpha$*
   (точное определение элементарных периодов ранга 1 дано выше). Множество всех слов вида A^n, где A – элементарный период ранга i, обозначается через $\mathscr{E}_i$.

4. *В ранге $\alpha-1$ рассматривается следующая группа, заданная определяющими соотношениями*:
$$B(m,n,\alpha-1)=\Big\langle a_1,a_2,\dots,a_m;\Big\{A^n=1\ \Big|\ A^n\in\bigcup_{i=1}^{\alpha-1}\mathscr{E}_i\Big\}\Big\rangle. \qquad (7)$$
При $\alpha=1$ группа $B(m,n,0)$ совпадает со свободной группой F_m с m порождающими.
5. *Отношение эквивалентности в ранге $i<\alpha$ для слов $X,Y\in\mathscr{R}_i$*, которое обозначается через $X\overset{i}{\sim}Y$. При этом $X\overset{0}{\sim}Y$ означает, что слова X и Y равны графически, а отношение эквивалентности $X\overset{\alpha-1}{\sim}Y$ для слов X,Y из множества $\mathscr{R}_{\alpha-1}$ совпадает с отношением равенства в группе (7).

Слово A в алфавите (3) называется *периодом ранга* α, если A^n принадлежит множеству $\mathscr{R}_{\alpha-1}$ и содержит такое ядро ранга $\alpha-1$, длина которого меньше удвоенной длины периода A. При этом слово A^n называется *периодическим словом ранга* α. Оно будет содержать много ядер ранга $\alpha-1$, которые равномерно распределены во всех периодах A. Среди периодов ранга α мы сначала выбираем так называемые минимальные периоды ранга α. Для этого мы рассматриваем всевозможные слова Y, эквивалентные A^n в ранге $\alpha-1$. Мы говорим, что период A *не минимален в ранге* α, если среди слов, эквивалентных A^n в ранге $\alpha-1$, найдется слово вида PB^tQ, где $t\geqslant 9$, B есть период ранга α, в слове B^n на каждый период B приходится меньше ядер ранга $\alpha-1$, чем в слове A^n приходится на период A, и при этом подслово B^t содержит не меньше ядер ранга $\alpha-1$, чем их приходится на 3 периода A слова A^n. В противном случае мы называем A *минимальным периодом ранга* α.

Среди минимальных периодов ранга α выбираются элементарные периоды ранга α. При этом каждый минимальный период ранга α, который не является элементарным периодом ранга α, объявляется периодом следующего ранга $\alpha+1$. Множество всех элементарных периодов ранга α обозначается через $\mathscr{E}_\alpha$.

Слово E называется *элементарным словом ранга* α с периодом A, если $A^n\in\mathscr{E}_\alpha$ и имеется такое слово $Y=PEQ$, что $A^n\overset{\alpha-1}{\sim}Y$ и вхождение $P*E*Q$ начинается и кончается ядрами ранга $\alpha-1$. При этом $P*E*Q$ называется *порождающим вхождением* для слова E. Элементарное слово E ранга α называется *элементарной t-степенью ранга* α (пишем $l_\alpha(E)\geqslant t$), если в его порождающем вхождении содержится больше ядер ранга $\alpha-1$, чем их приходится на $t-1$ периодов слова A^n. Через Эл(α,A) обозначается множество всех элементарных слов ранга α с периодом A.

Замечание 1. Две элементарные 9-степени E и D ранга α называются родственными (пишем Род(E,D)), если они принадлежат одному и тому же множеству Эл(α,A). Отношение Род(E,D) транзитивно. Два элементарных слова E и D данного ранга α называются сравнимыми по родству, если либо Род(E,D), либо Род(E,D^{-1}).

В леммах 5.21 и 5.22 главы II книги [9] были установлены следующие два свойства отношения Род(E,D), которые существенно используются в так называемой периодизации элементарных 9-степеней и в доказательстве отсутствия инволюций в группе $B(m,n)$ при нечетных n (см. п. 2.36 главы IV в [9]):

1) если E – элементарная 9-степень ранга α, то E и E^{-1} не родственны;

2) если $E \in \text{Эл}(\alpha, A)$, то $E \notin \text{Эл}(\alpha, A^{-1})$.

Заметим, что утверждение 2) непосредственно следует из 1).

Далее вводится понятие *нормированного вхождения* элементарного слова E ранга α в данное слово X из множества $\mathscr{R}_{\alpha-1}$. Такие вхождения обладают многими свойствами соответствующих порождающих вхождений.

На основе ряда установленных свойств элементарных слов ранга α и их вхождений вводится понятие r – *поворота ранга* α. Пусть $r \geqslant 9$ и $A = A_1A_2$ есть элементарный период ранга α. Переход

$$X = PA^tA_1Q \to PA^{-n+t+1}A_2^{-1}Q = Y \tag{8}$$

называется *простым* r*-поворотом ранга* α данного вхождения PA^tA_1Q элементарного слова A^tA_1, если слова X и Y лежат в $\mathscr{R}_{\alpha-1}$ и в обоих вхождениях PA^tA_1Q и $PA^{-n+t+1}A_2^{-1}Q$ содержатся нормированные вхождения элементарных r-степеней ранга α с периодами A и A^{-1} соответственно. Очевидно, что переход (8) равносилен применению определяющего соотношения $1 = A^{-n}$ с последующим сокращением в группе $B(m, n, \alpha - 1)$.

Понятие r-поворота ранга α естественным образом распространяется на переходы вида $X_1 \to Y_1$, где слова X_1 и Y_1 эквивалентны в ранге $\alpha - 1$ словам X и Y соответственно.

Если $r \geqslant k \geqslant 9$, то всякий r-поворот ранга α есть также k-поворот того же вхождения.

Некоторые q-повороты ранга α называются *реальными поворотами ранга* α (см. [9; п. 4.23]). Два слова X, Y из множества $\mathscr{R}_{\alpha-1}$ называются *эквивалентными в ранге* α (пишем $X \overset{\alpha}{\sim} Y$), если либо $X \overset{\alpha-1}{\sim} Y$, либо можно указать некоторую последовательность реальных поворотов ранга α, переводящую X в Y. Таким образом, для любого ранга α и любых слов X, Y из множества $\mathscr{R}_{\alpha-1}$ по определению верна импликация

$$X \overset{\alpha-1}{\sim} Y \quad \Rightarrow \quad X \overset{\alpha}{\sim} Y. \tag{9}$$

При рассмотрении последовательностей реальных поворотов ранга α важную роль играет понятие *совпадения индивидуальностей* вхождений элементарных 9-степеней ранга α в слова рассматриваемой последовательности. Для простого поворота ранга α это понятие вводится следующим образом.

Выделенные в повороте (8) вхождения периодических слов по определению соответствуют друг другу по индивидуальности в (8), а каждое содержащееся в P (или в Q) нормированное вхождение элементарной 9-степени E ранга α в слово X естественным образом соответствует по индивидуальности в (8) лежащему точно в том же положении в P (или в Q) вхождению слова E в слово $PA^{-n+t+1}A_2^{-1}Q$ при условии, что оно также нормированное. Это отношение транзитивно распространяется на любые последовательности реальных поворотов ранга α, т. е. на отношение $X \overset{\alpha}{\sim} Y$.

Далее для нормированных вхождений элементарных 9-степеней ранга α в слово X вводится понятие *устойчивости* в данном реальном повороте $X \to Y$

ранга α. Нормированное вхождение V элементарной p-степени E ранга α в слово X называется *ядром ранга* α слова X, если оно устойчиво (т. е. *не затрагивается*) в любом реальном повороте ранга α, не являющемся поворотом самого вхождения V, и при этом никакое его нормированное продолжение не обладает этим свойством.

Если два слова эквивалентны в ранге α, то они содержат одинаковое число ядер ранга α. Таким образом, число ядер ранга α данного слова является *инвариантом* в эквивалентных преобразованиях слов в ранге α.

Приведенное слово X ранга $\alpha - 1$ называется *приведенным словом ранга* α (пишем $X \in \mathscr{R}_\alpha$), если все его ядра ранга α содержат не более чем $n - 176$ периодов.

На множестве $\mathscr{R}_\alpha$ следующим образом определяется операция группового умножения слов, называемая *смыканием ранга* α:

$$[X, Y]_\alpha = PQ \quad \Longleftrightarrow \quad (X \overset{\alpha}{\sim} PT \ \& \ Y \overset{\alpha}{\sim} T^{-1}Q \ \& \ PQ \in \mathscr{R}_\alpha).$$

Доказывается, что эта операция на множестве $\mathscr{R}_\alpha$ определена однозначно с точностью до эквивалентности в ранге α и ассоциативна. Более того, множество классов эквивалентности в ранге α слов из $\mathscr{R}_\alpha$ с этой бинарной операцией образует группу, изоморфную группе

$$B(m, n, \alpha) = \left\langle a_1, a_2, \dots, a_m; \left\{ A^n = 1 \;\middle|\; A^n \in \bigcup_{i=1}^{\alpha} \mathscr{E}_i \right\} \right\rangle. \tag{10}$$

Доказывается, что для любых слов X, Y из $\mathscr{R}_\alpha$ выполнено соотношение

$$X \overset{\alpha}{\sim} Y \quad \Longleftrightarrow \quad X = Y \text{ в группе } B(m, n, \alpha). \tag{11}$$

В результате завершения индуктивных доказательств в пределе мы получаем группу, изоморфную свободной бернсайдовой группе $B(m, n)$. Тем самым завершается доказательство следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 3. *При нечетных $n \geqslant 665$ свободная бернсайдова группа $B(m, n)$ изоморфна группе*

$$B(m, n, \infty) = \left\langle a_1, a_2, \dots, a_m; \left\{ A^n = 1 \;\middle|\; A^n \in \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathscr{E}_i \right\} \right\rangle. \tag{12}$$

Таким образом, изложенный в работах [8] и [9] подход заключается в том, что, начиная с группы $B(m, n, 0)$ со свободными порождающими (3), мы последовательно добавляем определяющие соотношения вида $A^n = 1$, сначала для всех элементарных периодов ранга 1, затем – для всех элементарных периодов ранга 2 и т. д. При этом само понятие элементарного периода ранга α, так же как и все сопутствующие ему понятия для ранга α, определяются на базе отношения равенства слов в уже построенной группе $B(m, n, \alpha - 1)$.

Доказательство бесконечности группы $B(m, n)$ опирается на существование бесконечных двубуквенных слов, которые не содержат подслов вида A^3 (так называемых последовательностей Туэ–Аршона). Роль такой последовательности здесь может играть построенная выше в лемме 1 последовательность слов C_i.

Среди многочисленных утверждений, доказываемых совместной индукцией, в нашей теории есть следующая простая, но ключевая лемма.

Лемма 4. *Если слово X не содержит подслов вида A^9, то оно является приведенным во всех рангах α и не эквивалентно никакому отличному от него несократимому слову.*

Легко доказывается, что каждое слово в алфавите группы $B(m,n)$ равно в ней некоторому слову, которое является приведенным во всех рангах. Очевидно, если два слова эквивалентны в некотором ранге α, то они равны в группе $B(m,n)$. Доказывается, что для слов, являющихся приведенными во всех рангах, верно и обратное, т. е. верна следующая лемма.

Лемма 5. *Если слова X и Y являются приведенными во всех рангах, то*

$$X = Y \text{ в } B(m,n) \quad \Longleftrightarrow \quad X \overset{\alpha}{\sim} Y \text{ при некотором } \alpha.$$

В силу лемм 4 и 5 слова C_i из леммы 1 задают бесконечное число попарно не равных друг другу элементов группы $B(m,n)$. Тем самым завершается доказательство бесконечности группы $B(m,n)$.

Группы $B(m,n)$ могут быть заданы независимой системой определяющих соотношений. Такая система определяющих соотношений для группы $B(m,n)$ получается путем выбора в каждом классе взаимно сопряженных в группе $B(m,n,\alpha-1)$ слов вида A^n с элементарным периодом A ранга α по одному слову, с дополнительным условием, чтобы они не были сопряжены также и отрицательным степеням уже выбранных слов вида A^n.

Пусть $\overline{\mathscr{E}}_\alpha$ есть некоторое из выбранных таким образом множеств слов вида A^n, где каждое слово вида A^n с элементарным периодом A ранга α сопряжено в ранге $\alpha-1$ некоторому слову из множества $\overline{\mathscr{E}}_\alpha$ и для любой пары слов A^n и B^n из множества $\overline{\mathscr{E}}_\alpha$ пары слов A^n, B^n и A^n, B^{-n} не сопряжены в ранге $\alpha-1$.

Доказывается, что для любого из выбранных таким образом множеств $\overline{\mathscr{E}}_\alpha$ верна следующая теорема.

Теорема 4. *При нечетных $n \geqslant 665$ свободная бернсайдова группа $B(m,n)$ имеет следующее задание с помощью независимой системы определяющих соотношений*:

$$B(m,n) = \left\langle a_1, a_2, \ldots, a_m; \left\{ A^n = 1 \;\middle|\; A^n \in \bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{\mathscr{E}}_i \right\} \right\rangle, \tag{13}$$

т. е. ни одно из определяющих соотношений (13) *не следует из остальных.*

Эта теорема была доказана В. Л. Ширваняном в 1976 г. в работе [31] и вошла в его кандидатскую диссертацию.

Из теоремы 4 непосредственно следует, что группа $B(m,n)$ допускает континуум различных заданий с помощью счетных независимых систем определяющих соотношений.

Замечание 2. Очевидно, что каждую из этих систем можно упорядочить лексикографически и тогда в каждом ранге можно будет добавлять только одно определяющее соотношение. Возможность такого задания бернсайдовых групп представляет несомненный интерес, как одно из следствий теории

Новикова–Адяна. Но использовать лексикографическое упорядочение вместо содержательной классификации периодических слов, развитой в работах [8] и [9], нецелесообразно, так как при этом за счет упрощения определения приходится усложнять доказательство. Если новые соотношения выбираются лексикографически, т. е. “вслепую”, то приходится анализировать структуру новых периодов, которые возникли случайно. В 1982 г. А. Ю. Ольшанский попробовал сделать это в работе [32], используя при этом адекватный язык диаграмм ван Кампена. На первый взгляд это упростило систему определений. Но потом за это пришлось платить большую цену. Для того чтобы преодолеть возникшие при этом новые трудности, ему пришлось поднять экспоненту n в миллиарды раз, вводя при этом много новых параметров, неравенств между ними и т. д. Очень красноречиво охарактеризовал в середине 80-х эту ситуацию И. Г. Лысёнок, который сначала читал статью [32], а потом монографию [9]. На мое предложение сравнить эти два доказательства он ответил: “Только после чтения Вашей книги [9] я по-настоящему понял доказательство Ольшанского, изложенное в статье [32]”. Подробнее о предложенном Ольшанским подходе к использованию теории Новикова–Адяна на языке диаграмм ван Кампена и о результатах, полученных с помощью этого подхода, см. раздел 7.

3. Другие свойства свободных периодических групп нечетного периода

Как уже было отмечено выше, созданный авторами в [8] метод исследования периодических групп нечетного периода вскоре нашел ряд других важных приложений. В том же 1968 г. вышли еще две совместные статьи [33] и [34], в которых мы с П. С. Новиковым доказали теоремы, характеризующие важные новые свойства групп $B(m,n)$ при достаточно больших нечетных периодах $n \geqslant 4\,381$. В монографии [9] все результаты совместных статей [8], [33], [34] доказываются для нечетных периодов $n \geqslant 665$. Приведем некоторые из этих результатов.

Теорема 5. *Алгоритмические проблемы распознавания равенства слов и сопряженности слов разрешимы для групп $B(m,n)$ при любых m и нечетных $n \geqslant 665$.*

Разрешимость проблемы распознавания равенства слов для $B(m,n)$ вытекает из изложенного в п. 5.4 главы I монографии [9] *принципа эффективности*, согласно которому все рассматриваемые множества слов, все функции и отношения между словами и их подсловами алгоритмически распознаваемы, что проверяется попутно в ходе совместной индукции.

Для доказательства разрешимости проблемы распознавания сопряженности, кроме указанного принципа эффективности, используется следующая важная лемма (см. лемму IV.1.2 в [9]).

Лемма 6. *В группе $B(m,n)$ всякое несократимое слово сопряжено некоторой степени A^r некоторого элементарного периода A некоторого ранга α, причем этот элементарный период, его степень r и ранг α можно найти алгоритмически.*

По этой лемме вопрос о распознавании сопряженности любых двух слов сводится к распознаванию сопряженности соответствующих элементарных периодов, что, в свою очередь, легко проверяется на основе принципа эффективности.

Теорема 6. *Свободные бернсайдовы группы* $B(m,n)$ *при* $m>1$ *и нечетных* $n\geqslant 665$ *не могут быть заданы конечным числом определяющих соотношений.*

Для доказательства этого утверждения с помощью бесповторной последовательности Туэ–Аршона строятся примеры элементарных периодов любого наперед заданного ранга α. С другой стороны, устанавливается, что никакое соотношение $A^n=1$ для элементарного периода A данного ранга не может быть выведено из таких же соотношений для периодов меньших рангов.

Теорема 7. *Все коммутативные подгруппы группы* $B(m,n)$ *при* $m>1$ *и нечетных* $n\geqslant 665$ *циклические и их порядки являются делителями числа* n. *Центр группы* $B(m,n)$ *тривиален.*

Доказательство утверждения, что при нечетных $n\geqslant 665$ всякая коммутативная подгруппа группы $B(m,n)$ является циклической и ее порядок есть делитель числа n, получается на основе следующей леммы.

Лемма 7. *Любой неединичный элемент* x *группы* $B(m,n)$ *равен в* $B(m,n)$ *некоторой степени некоторого элемента* z, *имеющего порядок* n, *причем все коммутирующие с* x *элементы являются степенями того же элемента* z.

Из этой же леммы легко вытекает тривиальность центра группы $B(m,n)$.

Цикличность конечных подгрупп группы $B(m,n)$ при нечетных $n\geqslant 4\,381$ впервые была доказана в работе автора [35]. В книге [9], соответственно, была доказана следующая теорема.

Теорема 8. *Конечными подгруппами группы* $B(m,n)$ *при* $m\geqslant 1$ *и нечетных* $n\geqslant 665$ *являются только ее циклические подгруппы.*

Этот результат выводится из свойств построенной в работе [27] группы без кручения $A(m,n)$, факторгруппа которой по центру изоморфна группе $B(m,n)$ (подробнее о группе $A(m,n)$ см. раздел 5).

Пусть конечная подгруппа G группы $B(m,n)$ порождается элементами

$$X_1, X_2, \dots, X_k.$$

Рассмотрим подгруппу F группы $A(m,n)$, порождаемую элементами

$$X_1, X_2, \dots, X_k, d.$$

Так как элемент d содержится в центре группы F, то факторгруппа по ее центру конечна. Но из конечности факторгруппы по центру следует конечность коммутанта (см., например, [36; с. 163]). Следовательно, коммутант группы F конечен. Так как в группе $A(m,n)$ конечна только единичная подгруппа, то группа F абелева. Тогда и подгруппа G абелева. Остается воспользоваться теоремой 7.

В работе [35] было также доказано, что группа $B(2,n)$ содержит подгруппу, изоморфную группе $B(3,n)$, а значит, она содержит и подгруппы, изоморфные любой группе $B(m,n)$ при данном n. Отсюда легко получаем следующую теорему.

Теорема 9. *При $m \geqslant 1$ и нечетных $n \geqslant 665$ свободная бернсайдова группа $B(m,n)$ содержит бесконечные убывающие и бесконечные возрастающие цепочки вложенных подгрупп.*

Позднее в работе [37] В. Л. Ширванян доказал, что группа $B(\infty,n)$ также вкладывается в группу $B(2,n)$.

На самом деле, в группах $B(m,n)$ существуют также бесконечные убывающие и бесконечные возрастающие цепочки нормальных подгрупп. При составных $n = rs$, где $r \geqslant 665$ нечетно и $s > 1$, это доказывается несложно.

Несколько сложнее приведенное в работе [14] доказательство аналогичного свойства при любых простых $n \geqslant 665$ и $m > 65$. Для этого случая в статье [14] была рассмотрена новая модификация первоначальной теории. В ней наряду с поворотами периодических слов используются также повороты так называемых *метапериодических слов*, которые не являются периодическими. Хотя такие повороты появляются только в ранге 1, они обеспечивают возможность бесконечного числа последовательных нетривиальных факторизаций группы $B(m,n)$, в том числе и при простых $n \geqslant 665$.

Эта новая конструкция позволила автору впервые доказать в работе [14] следующую теорему.

Теорема 10. *Можно построить примеры конечно порожденных групп с рекурсивным множеством определяющих соотношений, имеющих неразрешимую проблему равенства и удовлетворяющих тождеству $x^n = 1$.*

Функция роста $\gamma(s)$ конечно порожденной группы определяется как число различных элементов, которые представимы в виде произведения не более чем s порождающих. В монографии [9] впервые был доказан следующий весьма неожиданный результат.

Теорема 11. *При $m \geqslant 1$ и нечетных $n \geqslant 665$ свободная бернсайдова группа $B(m,n)$ имеет экспоненциальный рост.*

В частности, было установлено, что в группе $B(2,n)$ (при нечетных $n \geqslant 665$) имеется не менее $4 \cdot (2,9)^{s-1}$ различных элементов, которые представимы в виде слова длины s. Заметим, что это очень близко к соответствующей оценке $4 \cdot 3^{s-1}$ для абсолютно свободной группы ранга 2. Напомним, что для отрицательного решения проблемы Бернсайда изначально было достаточно лишь ответить на вопрос: **ограничена или нет функция роста группы** $B(2,n)$?

Р. И. Григорчук в работе [38] доказал, что построенная им в [21] бесконечная 3-порожденная периодическая группа с неограниченными порядками элементов имеет промежуточный рост, т. е. число различных элементов, представимых в виде произведения не более k порождающих, растет быстрее любого полинома от k, но медленнее любой экспоненты по k. Тем самым он подтвердил гипотезу, которую я ранее высказал на семинаре по алгоритмическим проблемам алгебры на мехмате МГУ.

В 1982 г. в работе [39] была доказана следующая теорема.

Теорема 12. 1) *При* $m \geqslant 1$ *и нечетных* $n \geqslant 665$ *свободная бернсайдова группа* $B(m,n)$ *не является аменабельной.*

2) *Симметричное случайное блуждание на* $B(m,n)$ *не является возвратным.*

Оба утверждения теоремы 12 были сформулированы мной в виде гипотез еще в 1977 г. в статье [40] (с. 10). Тем самым был указан первый пример неаменабельной группы, удовлетворяющей нетривиальному тождеству.

Результат о невозвратности случайных блужданий на группе $B(m,n)$ явился отрицательным ответом на вопрос, который был поставлен еще в 1959 г. известным американским математиком Г. Кестеном в работе [41].

Впоследствии А. Ю. Ольшанский и М. В. Сапир в работе [42] использовали результат о неаменабельности групп $B(m,n)$ для построения примера конечно определенной неаменабельной группы, которая не содержит свободных подгрупп ранга 2.

В работе [43] Н. Монод и Н. Озава использовали теорему о неаменабельности групп $B(m,n)$ для доказательства неунитаризуемости групп $B(m,np)$ при $m > 1$ и нечетных n и p, где $n \geqslant 665$. Группа G называется *унитаризуемой группой*, если все ее равномерно ограниченные представления π над гильбертовым пространством H являются унитаризуемыми.

Напомним, что условием Дэна для данной группы G, заданной множеством определяющих соотношений $\mathbf{R}$, называется требование, чтобы каждое равное 1 в G несократимое слово имело вид PEQ, где E есть кусок левой части некоторого определяющего соотношения $A = 1$ из множества $\mathbf{R}$, причем длина этого куска E больше половины длины A.

Скоростью сходимости алгоритма Дэна относительно A называется максимальное число $\delta_{\mathbf{R}}$ такое, что разность длин $|E| - |QP|$ всегда не меньше $\delta_{\mathbf{R}}$, а *относительной скоростью сходимости* для $\mathbf{r}$ называется максимальное число $\gamma_{\mathbf{R}}$, удовлетворяющее условию $|E| - |QP| \geqslant \gamma_{\mathbf{r}}|PEQ|$.

Для оценки спектрального радиуса случайного блуждания на группе $B(m,n)$ в работе [39] была доказана следующая лемма.

Лемма 8. *Для свободной периодической группы* $B(m,n)$ *можно указать такую систему определяющих соотношений, которая удовлетворяет условию Дэна, причем скорость сходимости соответствующего алгоритма Дэна не меньше* 228, *а относительная скорость сходимости не меньше* $1/3$.

В 1980 г. в работе [44] (русскую версию см. в [45]) была доказана следующая теорема.

Теорема 13. *Пусть группа* G *задана некоторым конечным множеством определяющих соотношений вида*

$$A_i^n = 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, k) \tag{14}$$

в алфавите

$$a_1, a_2, \ldots, a_m, a_1^{-1}, a_2^{-1}, \ldots, a_m^{-1},$$

где $n \geqslant 665$.

Если группа G не содержит инволюций, то в ней разрешимы проблема распознавания равенства и проблема сопряженности.

Для доказательства этой теоремы в работе 1980 г. [44] автором уже рассматривалась упрощенная версия теории Новикова–Адяна из [9], примененная для конечного числа определяющих соотношений вида (14). В этой версии в каждом ранге может быть по одному определяющему соотношению вида (14). Так как для этой версии также выполняется принцип эффективности, то аналогично теореме 5 устанавливается разрешимость проблемы распознавания равенства слов в G, а также разрешимость проблемы сопряженности.

Если к конечноопределенной группе G, не содержащей инволюций и заданной конечным числом определяющих соотношений вида (14), применить упрощенную версию изложенного в работе [39] доказательства леммы 8, то получим следующее утверждение.

Теорема 14. *Если группа G имеет конечное задание* (14) *при нечетном $n \geqslant 665$ и не содержит инволюций, то для G можно указать конечное задание, удовлетворяющее условию Дэна.*

Напомним, что группы, удовлетворяющие условию Дэна, с легкой руки М. Громова в конце 80-х годов были названы “*гиперболическими*” в связи с тем, что он предложил для них геометрическую интерпретацию (см. [46]).

Как уже отмечалось в обзоре [47], если счетное множество определяющих соотношений группы $B(m,n)$ при $m \geqslant 1$ и нечетных $n \geqslant 665$ упорядочить лексикографически в виде (см. замечание 2 на стр. 23)

$$B_1^n = 1, \quad B_2^n = 1, \quad \dots, \quad B_i^n = 1, \quad B_{i+1}^n = 1, \quad \dots, \tag{15}$$

то, применяя теорему 14, мы получим следующее интересное следствие

Следствие 1. *При $m \geqslant 1$ и нечетных $n \geqslant 665$ свободная бернсайдова группа $B(m,n)$ может быть представлена как предел бесконечной последовательности гиперболических групп, т. е. групп, задаваемых конечным числом определяющих соотношений, удовлетворяющих условию Дэна,*

$$G_0, G_1, G_2, \dots, G_i, G_{i+1}, \dots,$$

где G_0 есть абсолютно свободная группа с m порождающими и задание каждой группы G_{i+1} получается добавлением к заданию предыдущей группы G_i одного определяющего соотношения $B_{i+1}^n = 1$ из последовательности (15).

4. Независимые системы групповых тождеств

Уже в 1969 г. мне стало ясно, что теорию Новикова–Адяна можно использовать для построения групп с различными наперед заданными свойствами. Эта идея была впервые применена мной для решения известной проблемы конечного базиса теории групп. Требовалось выяснить, можно ли любое многообразие групп задать конечной системой тождеств, т. е. можно ли любую систему групповых тождеств привести к эквивалентной ей конечной системе тождеств? Отрицательный ответ на этот вопрос был получен в самой сильной форме. Именно в 1969 г. была доказана следующая теорема (см. [48] и [49]).

Теорема 15. *Система групповых тождеств*

$$\{(x^{pn}y^{pn}x^{-pn}y^{-pn})^n = 1\}, \tag{16}$$

где $n \geqslant 4\,381$ – фиксированное нечетное число, а p – параметр, пробегающий все простые числа, является независимой, т.е. ни одно из этих тождеств не вытекает из остальных.

В книге [9] этот результат был доказан для нечетных периодов $n \geqslant 1\,003$.

Для доказательства теоремы 15 требовалось по любому значению параметра $p = r$ построить некоторую группу G_r, удовлетворяющую всем тождествам (16), кроме тождества, которое получается при $p = r$. Искомая группа G_r строится на основе некоторой модификации нашей теории. При этом совместной индукцией по рангу α наряду со всеми обычными понятиями определяется понятие *отмеченного периода ранга* $\alpha + 1$. Именно, минимальный период D ранга $\alpha + 1$ называется отмеченным в ранге α, если можно указать такие слова A и B, что после подстановки их в левую часть одного из тождеств (16) при $p \neq r$ получается слово, которое сопряжено в группе $B(m, n, \alpha)$ некоторой степени периода D. В новой теории рассматриваются только такие повороты (8) ранга α, в которых A есть отмеченный элементарный период ранга α. Вносится соответствующая корректировка всех определений основных понятий. В частности, все ограничения на число периодов в ядрах ранга α приведенных слов относятся только к тем ядрам, которые связаны с отмеченными периодами ранга α. Искомая группа G_r строится в новой теории аналогично тому, как в первоначальной теории строилась группа $B(m, n, \infty)$.

Истинность тождеств (16) при $p \neq r$ в построенной группе доказывается аналогично тому, как в первоначальной теории доказывалась истинность тождества $x^n = 1$ в группе $B(m, n, \infty)$. При этом ключевую роль играет следующая лемма.

Лемма 9. *Если элементарный период D отмечен в ранге α и в слово D^9 не входит никакая отмеченная q-степень ранга α, то период D отмечен и в некотором ранге $< \alpha$.*

Лемма 9 существенно используется также в доказательстве того, что тождество (16) при $p = r$ в группе G_l не выполняется.

Использованное впервые в работе [49] обобщение нашей теории открыло путь для решения многих других трудных проблем теории групп, так как на этом пути были развиты и другие вариации нашей теории, выполненные сначала мной, а затем и другими авторами.

О том, что у меня есть отрицательное решение проблемы конечного базиса теории групп, основанное на теории Новикова–Адяна, я сообщил моему коллеге по мехмату МГУ А. Л. Шмелькину весной 1969 г. Я сказал ему, что готовлю к публикации статью. В конце сентября 1969 г., приехав в Новосибирск на алгебраическую конференцию, я был крайне удивлен, что за несколько дней до начала конференции в программу этой конференции был включен дополнительный доклад А. Ю. Ольшанского, который был аспирантом Шмелькина в МГУ. В этом докладе заявлялось, что он недавно получил отрицательное решение проблемы конечного базиса. Он доказал, что существует континуум различных многообразий групп, откуда из мощностных соображений вытекает существование многообразия, которое не имеет конечного базиса тождеств. Но конкретные тождества он не рассматривал. Я был удивлен, что мне пришлось приехать в Новосибирск, чтобы узнать о новом результате аспиранта Шмелькина. В сложившейся ситуации я счел нецелесообразным свое присутствие на этом докладе, назначенном на последний день.

Вернувшись в Москву, я подготовил и 23 октября 1969 г. сдал в ДАН заметку [48], где опубликовал свою бесконечную независимую систему групповых тождеств (16). Я доложил свой результат на семинаре, а также предложил Ольшанскому рассказать о своем доказательстве на нашем семинаре в МГУ, а Шмелькин предложил опубликовать оба наши доказательства в одном и том же номере журнала "Известия", так как они были получены независимо.

Парадоксально, что после всей этой истории в своей статье [50] Ольшанский даже не упомянул мой результат. Отмечая результат Ольшанского в обеих своих публикациях [48] и [49], я был уверен, что Ольшанский сделает то же самое. Я полагаю, что Шмелькин не знал об этом.

Впоследствии многие авторы строили различные примеры не конечно базируемых систем тождеств. Среди них система тождеств (16) отличается тем, что она записывается в двубуквенном алфавите. Кроме того, особо хочется отметить изящный пример многообразия, указанный другим учеником Шмелькина Ю. Г. Клейманом.

В работе [51] Клейман доказал, что множество групповых тождеств вида

$$(x_1^2 x_2^2 \cdots x_n^2)^4 = 1 \qquad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

не является конечно базируемым. Тем самым он дал ответ на конкретный вопрос, поставленный в проблеме 11 монографии Х. Нейман [52].

5. Конечно порожденные некоммутативные аналоги группы рациональных чисел

Если в коммутативной группе пересечение любых двух нетривиальных подгрупп бесконечно, то она изоморфна некоторой подгруппе аддитивной группы рациональных чисел. Это свойство можно считать характеристическим свойством аддитивной группы рациональных чисел.

В теории групп давно стоял открытый вопрос о существовании некоммутативной счетной группы с таким же свойством, которую можно было бы считать некоммутативным аналогом аддитивной группы рациональных чисел. По определению такая группа не должна иметь элементов конечного порядка.

В 1971 г. в работе [27] с помощью еще одной новой модификации теории Новикова–Адяна было впервые получено положительное решение этого вопроса. Построенные в [27] конечно порожденные некоммутативные группы без кручения $A(m,n)$, в которых пересечение любых двух нетривиальных подгрупп бесконечно, задаются в следующем виде:

$$A(m,n) = \Big\langle a_1, a_2, \dots, a_m, d;$$
$$a_j d = d a_j,\ 1 \leqslant j \leqslant n,\ \Big\{ A^n = d \ \Big|\ A^n \in \bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{\mathscr{E}}_i \Big\} \Big\rangle,$$

где $\overline{\mathscr{E}}_i$ – независимые множества определяющих соотношений ранга i, которые выше использовались в задании (13) для группы $B(m,n)$.

Элемент d группы $A(m,n)$ порождает ее циклический центр $\langle d \rangle$ бесконечного порядка, а факторгруппа ее по центру $\langle d \rangle$ изоморфна свободной бернсайдовой группе $B(m,n)$.

Тем самым в работе [27] впервые было установлено, что в теории Новикова–Адяна можно классифицировать не только периодические соотношения; достаточно, чтобы они содержали длинные периодические отрезки.

В то время как подгруппы группы рациональных чисел либо являются циклическими, либо имеют бесконечное число порождающих, их некоммутативные аналоги $A(m,n)$ могут иметь любое конечное число порождающих $m \geqslant 2$.

В работе [27] эта конструкция рассматривалась для любых $m \geqslant 2$ и нечетных периодов $n \geqslant 4\,381$, а в монографии [9] эти результаты были распространены на все нечетные периоды $n \geqslant 665$.

Основное свойство групп $A(m,n)$ заключается в следующем утверждении.

Лемма 10. *Любой элемент группы $A(m,n)$ в степени n равен некоторой степени элемента d, порождающего центр группы, причем d имеет бесконечный порядок.*

Если к определяющим соотношениям группы $A(m,n)$ добавить еще одно соотношение $d^n = 1$, то в полученной группе $\bar{A}(m,n)$ центр, порождаемый элементом d, будет иметь порядок n. Группа $\bar{A}(m,n)$ обладает следующим интересным свойством.

Теорема 16. *Группа $\bar{A}(m,n)$ допускает только дискретную топологию.*

Вопрос о существовании нетопологизируемой счетной группы был поставлен А. А. Марковым и оставался открытым несколько десятилетий. Теорема 16 непосредственно вытекает из леммы 10. В самом деле, по лемме 10 в группе $\bar{A}(m,n)$ любой неединичный элемент является решением одного из конечного числа уравнений:

$$x^n = d, \quad x^n = d^2, \quad \dots, \quad x^n = d^{n-1}. \tag{17}$$

Если оснастить группу $\bar{A}(m,n)$ какой-то топологией T, то в полученной топологической группе множество всех решений каждого уравнения из конечного набора (17) есть замкнутое множество. Дополнение к объединению этих множеств решений содержит только единичный элемент группы $\bar{A}(m,n)$, и оно должно быть открытым в рассматриваемой топологии T. Следовательно, топология T дискретна.

Идея рассмотренной факторизации группы $A(m, n)$ по d^n с последующим использованием леммы 10 появилась у Ольшанского в 1978 г., когда он знакомился с монографией [9]. Тогда же он сообщил мне об этом интересном применении моей конструкции, за что я вскоре поблагодарил его в статье [53] (с. 37).

Еще одно интересное следствие получается при факторизации группы $A(m, n)$ по d^2. Известно, что если силовская подгруппа локально конечной группы лежит в ее центре, то она выделяется в ней прямым слагаемым. Естественно возникает вопрос, не будет ли верно то же самое для периодических групп ограниченного периода. Оказывается, что это не так. Если добавить к группе $A(m, n)$ дополнительное соотношение $d^2 = 1$, то в полученной группе $A'(m, n)$ периода $2n$ силовская 2-подгруппа порождается центральным элементом d и не может быть выделена прямым слагаемым (см. [53]).

6. Периодические произведения групп

Еще одно интересное приложение изложенной в монографии теории было получено в 1976 г. в работе [28] (см. также комментарий в [30]). В этой работе было установлено, что с использованием нашей теории могут быть построены новые операции умножения групп, названные *периодическими произведениями данного нечетного периода n или n-периодическими произведениями.* Эти операции умножения строятся при нечетных $n \geqslant 665$ для любого заданного семейства групп
$$\{G_i \mid i \in I\} \tag{18}$$
и обозначаются через
$$F = \prod_{i\in I}^{n} G_i. \tag{19}$$

Они обладают всеми свойствами классических операций свободного и прямого произведений групп, такими как *точность*, *коммутативность* и *ассоциативность*, а также обладают свойством наследственности по подгруппам. Тем самым было получено положительное решение известной проблемы А. И. Мальцева о существовании таких операций, поставленной им в 1948 г.

Точность операции означает, что каждая компонента вложена в произведение F, причем образы заданных компонент при этом вложении попарно пересекаются только по единичному элементу и вместе порождают всю группу F. *Постулат Мальцева* означает, что если в периодическом произведении F данного периода n в каждой компоненте выбрать по подгруппе, то эти подгруппы порождают в F периодическое произведение того же периода n для выбранных подгрупп.

Суть предложенной в работе [28] конструкции заключается в том, чтобы на базе свободного произведения заданного семейства нетривиальных групп
$$F(n, 0) = \prod_{i\in I}^{*} G_i \tag{20}$$
классифицировать по рангам периодические слова в алфавите группы $F(n, 0)$ аналогично тому, как это делалось в [9] для слов в алфавите исходной свободной группы $B(m, n, 0)$, добавляя ранг за рангом все новые определяющие

соотношения вида $A^n = 1$ с элементарными периодами A ранга α. Вопрос заключается в том, как мы будем индуктивно определять эти элементарные периоды A ранга α.

Перейдем с подробным определениям.

1. Пусть дано произвольное семейство неединичных групп (18), задаваемых порождающими и определяющими соотношениями, причем группы G_i заданы своими таблицами Кэли, т.е. каждый неединичный элемент представлен некоторой порождающей буквой.

Пусть алфавиты этих групп G_i не пересекаются, а единичные элементы всех исходных групп обозначаются пустым словом Λ или символом 1, которые в произведениях опускаются.

Система порождающих свободного произведения $F(n,0)$ семейства (18) есть объединение систем образующих всех групп G_i, а система ее определяющих соотношений есть объединение систем определяющих соотношений в заданиях этих групп.

Мы будем отождествлять группы G_i с подгруппами группы $F(n,0)$, которые порождаются соответствующими буквами.

Неединичные элементы свободного произведения $F(n,0)$ представляются словами вида

$$b_1 b_2 \dots b_k, \tag{21}$$

где каждая из букв b_r есть некоторый неединичный элемент группы G_{i_r} и при этом выполняется условие

$$\forall r\ (r < k \Rightarrow i_r \neq i_{r+1}). \tag{22}$$

Иначе говоря, любые соседние множители b_j принадлежат разным подгруппам G_i. Очевидно, что все слова вида (21) с условием (22) являются несократимыми в группе $F(n,0)$. Будем называть их *приведенными словами ранга* 0. Слово (21) называем циклически приведенным, если $i_1 \neq i_k$.

2. Множество всех приведенных слов ранга 0 обозначим $\mathscr{R}_0$. На множестве $\mathscr{R}_0$ индукцией по длине $|XY|$ определим операцию сокращения или *смыкания ранга* 0, которую будем обозначать через $X \cdot Y$ или $[X,Y]_0$.

Пусть X, Y – непустые слова из множества $\mathscr{R}_0$.

Если последняя буква a слова X и первая буква b слова Y принадлежат разным подгруппам G_i, то положим

$$X \cdot Y \rightleftharpoons XY.$$

Пусть эти буквы a и b принадлежат одной и той же подгруппе G_i, скажем, $X = X_1 a$ и $Y = bY_1$, где $a, b \in G_i$.

Если при этом слово ab не равно единице в G_i, то положим

$$X \cdot Y \rightleftharpoons X_1 c Y_1,$$

где c – буква, равная слову ab в группе G_i.

Если же при этом ab равно единице в G_i, то положим

$$X \cdot Y \rightleftharpoons X_1 \cdot Y_1.$$

Множество $\mathscr{R}_0$ с бинарной операцией смыкания ранга 0: $[X,Y]_0 = X \cdot Y$ и есть свободное произведение (20) семейства групп (18).

3. Периодическое произведение (19) периода n для данного семейства (18) получается факторизацией их свободного произведения (20) по нормальной подгруппе, порожденной некоторой системой определяющих соотношений вида $A^n = 1$, где A пробегает множество элементарных периодов A всех рангов $\alpha = 1, 2, \dots$. Согласно работе [28], элементарные периоды ранга $\alpha > 0$ определяются индукцией по рангу α совместно с рядом других вспомогательных понятий аналогично тому, как это делалось в монографии [9] и кратко описано в разделе 2 настоящей статьи. При этом, как было отмечено в [28], для построения группы (19) нам нужно наложить некоторые ограничения на используемые периоды в рангах $\alpha > 0$.

Так как роль операции сокращения в свободной группе $F(n,0)$ играет определенная выше операция смыкания ранга 0, $X \cdot Y$, то в определение смыкания ранга α (см. [9; определение I.4.36]) нужно внести небольшое уточнение.

В качестве нового определения операции смыкания ранга α вместо старого определения I.4.36 мы полагаем для любых слов $X, Y \in \mathscr{R}_\alpha$

$$[X,Y]_\alpha = P \cdot Q \quad \Longleftrightarrow \quad \exists T\ (X \overset{\alpha}{\sim} PT\ \&\ Y \overset{\alpha}{\sim} T^{-1}Q)\ \&\ P \cdot Q \in \mathscr{R}_0, \tag{23}$$

где $P \cdot Q$ есть указанная в п. 2 операция смыкания ранга 0 на множестве приведенных слов $\mathscr{R}_0$.

Замечание 3. Как было отмечено в [28; п. 4, с. 5], для того чтобы построенная операция была точной, достаточно исключить из рассмотрения в качестве элементарных периодов ранга 1 элементы сомножителей G_i исходной группы $F(n,0)$, которые являются порождающими и имеют длину 1. Очевидно, что при этом все допущенные к рассмотрению периоды и их циклические сдвиги будут начинаться и оканчиваться буквами из разных множителей свободного произведения $F(n,0)$, т. е. будут циклически приведенными словами, которые не принадлежат отдельным множителям G_i.

Это ограничение гарантирует, что в построенной группе не появятся новые соотношения, которые связывали бы элементы одной и той же подгруппы G_i.

Замечание 4. Как было отмечено в статье [30], если исходные группы G_i содержат инволюцию, то для исключения новых инволюций в процессе индуктивного построения промежуточных групп $F(n,\alpha)$, которые являются аналогами групп $B(m,n,\alpha)$ из [9], достаточно в каждом ранге $\alpha > 0$ исключить из рассмотрения периоды A ранга α, которые равны произведению двух инволюций ранга $\alpha - 1$. Если исходные группы G_i не содержат инволюций, то это ограничение на выбор периодов ранга α будет выполняться тривиальным образом. Мы предполагаем, что выбор элементарных периодов ранга α во всех рангах происходит с учетом этого правила. К сожалению, в работе [28] это ограничение насчет инволюций было пропущено. В статье [30] этот пробел был устранен и было доказано, что при этом по существу остаются в силе все утверждения работы [28] с доказательствами. Нужно только в формулировке теоремы 2 этой работы уточнить, что в силу указанного правила в периодическом произведении (19) равенство $x^n = 1$ выполняется только для элементов, не равных произведению двух инволюций.

Ограничение рассматриваемого множества $\text{Пер}(\alpha, A)$, указанное в замечании 4, естественным образом приводит к сужению класса $\text{Эл}(\alpha, A)$ рассматриваемых элементарных слов ранга α. Конечно, оно отразится на содержании многих других рассматриваемых в нашей теории понятий. Сузится класс активных в данном ранге вхождений и их поворотов.

Точнее, во всех группах

$$F(n,\alpha) = \left\langle F(n,0); \left\{ A^n = 1 \;\middle|\; A^n \in \bigcup_{i=1}^{\alpha} \mathscr{E}_i \right\} \right\rangle,$$

которые являются аналогами групп (10) из раздела 2, все произведения вида XY, где слова X и Y сопряжены инволюциям из исходных групп G_i, будут иметь бесконечный порядок, так как их степени не будут активны в соответствующих рангах. Во всех этих группах не будет инволюций, отличных от тех, которые сопряжены инволюциям исходных групп G_i.

В пределе мы получаем группу

$$F(n,\infty) = \left\langle F(n,0); \left\{ A^n = 1 \;\middle|\; A^n \in \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathscr{E}_i \right\} \right\rangle, \tag{24}$$

которую и называем по определению *n-периодическим произведением* для данного семейства групп и обозначаем через $\prod_{i\in I}^{n} G_i$.

Нам нужно только в рамках совместной индукции проверить, что для всех рангов α остается в силе изложенное в [9] доказательство леммы 5.21 главы II, которое является ключевым для отношения $\text{Род}(E, D)$ (см. замечание 1 в разделе 2 настоящей статьи).

С учетом замечания 4 аналог леммы IV.2.36 в [9] об отсутствии во всех рангах $\alpha \geqslant 1$ инволюций, отличных от тех, которые сопряжены возможным инволюциям, лежащим в исходных группах G_i, формулируется в следующем виде.

Теорема 17. *Если для непустого слова $X \in \mathscr{R}_\alpha$ выполнено соотношение $X \overset{\alpha}{\sim} X^{-1}$, то слово X сопряжено в ранге α некоторой инволюции одной из подгрупп G_i группы $F(n,\alpha)$.*

Доказательство этого утверждения, как и доказательство леммы IV.2.36 в [9], проводится от противного индукцией по дополнительному параметру $I_\alpha(X, X-1)$, т. е. по числу ядер V ранга α слова X, которые *не родственны* своему образу $f_\alpha(V, X, X^{-1})$ при $X \overset{\alpha}{\sim} X^{-1}$.

Заметим, что при нечетном периоде n по индуктивному предположению теоремы 17 инволюцией ранга $\alpha-1$ может быть только слово, сопряженное в ранге $\alpha-1$ некоторой инволюции одной из исходных групп G_i. В силу ограничения на выбор элементарных периодов ранга α для получения противоречия нам достаточно доказать, что при условии леммы II.5.21 в [9] исходный элементарный период будет равен произведению двух инволюций ранга $\alpha-1$. Это легко вытекает из рассуждений, приведенных при доказательстве леммы II.5.21.

Замечание 5. Если мы используем указанное в замечании 4 ограничение на классификацию элементарных периодов ранга α, то можно рассматривать n-периодические произведения и для четных периодов $n = 2k$. При этом все остальные определения и все доказательства останутся такими же, как они приводились в статье [28], с учетом указанной ниже небольшой корректировки доказательства леммы II.5.21 в [9].

При рассмотрении n-периодических произведений для четных периодов n с использованием замечания 4 допустимые инволюции ранга α возникают во всех рангах независимо от их наличия в исходных группах, причем, теорема 17 в этом случае не будет верна. Но и в этом случае периоды ранга α не должны быть произведениями двух инволюций предыдущего ранга $\alpha-1$.

Внимательный читатель легко может убедиться, что при доказательстве леммы II.5.21 в [9] по существу было доказано, что если E есть элементарная 9-степень при исходном элементарном периоде A ранга α и имеет место $\text{Род}(E, E^{-1})$, то в соответствующем целом слове $Y_3 \in \mathscr{M}_{\alpha-1}$ между двумя ядрами C и C^{-1} ранга $\alpha-1$ должна лежать инволюция v ранга $\alpha-1$ (см. [9; п. 5.21, с. 78]), а это приводило к противоречию. Покажем, что и в данном случае мы получим противоречие. Для удобства читателя используем обозначения, которые были использованы в [9] при доказательстве леммы II.5.21.

Пусть S есть образ левого периода A элементарного слова D в периодизированном слове $Y_3 \in \overline{\mathscr{M}}_{\alpha-1}$. Тогда S есть начало слова $C^{-1}vC$ и оно сопряжено периоду A в ранге $\alpha-1$. Так как при этом по условию имеем $l_\alpha(P*D*HQ) = l_\alpha(P_3*C^{-1}vC*HQ) > 3$, то слово v должно иметь вид $v = uC^{-1}v_1$, где выделена основа C^{-1} первого ядра ранга $\alpha-1$, соответствующего по фазе относительно исходного периода A начальному ядру C^{-1} ранга $\alpha-1$ рассматриваемого вхождения. Тогда имеем $S = C^{-1}u$, и, следовательно, слово $C^{-1}u$ сопряжено в ранге $\alpha-1$ периоду A. Очевидно, мы можем для слова v_1 повторить рассуждения, которые были проведены в [9] для доказательства того, что слово v есть инволюция ранга $\alpha-1$. В результате получим, что и слово v_1 является инволюцией в ранге $\alpha-1$. Так как исходный период A сопряжен своему образу S, то это означает, что период A равен произведению двух слов, каждое из которых есть инволюция ранга $\alpha-1$, а это противоречит нашему соглашению (см. замечание 4) о выборе элементарных периодов. Следовательно, лемма II.5.21 остается в силе, если не допускаются периоды, являющиеся произведениями двух инволюций ранга $\alpha-1$.

Что касается утверждений, доказанных в статье [28], то ограничение, наложенное замечанием 4, отразится только на формулировке теоремы 2 на с. 7.

Следует отметить, что эта теорема к проблеме А. И. Мальцева не имеет отношения и использовалась автором в статье [29] для доказательства критерия простоты периодических произведений.

Теорема 2 работы [28] при наличии инволюций в исходных множителях G_i с учетом указанного в замечании 4 ограничения на выбор периодов ранга α должна быть изложена в следующем виде.

Теорема 18. *Пусть F есть периодическое произведение нечетного периода $n \geqslant 665$ произвольного семейства групп* (18). *Если элемент x группы F не сопряжен в F никакому элементу подгрупп G_i и не равен в F произведению двух инволюций, то в F выполнено соотношение $x^n = 1$.*

Доказательство остается тем же, нужно только учесть замечание 4.

В [29] был установлен следующий критерий простоты группы F, являющейся периодическим произведением нечетного периода для данного семейства групп (18).

Теорема 19. *Периодическое произведение нечетного периода $n \geqslant 665$ данного семейства не содержащих инволюцию групп*

$$\{G_i\}_{i \in I} \tag{25}$$

является простой группой в том и только том случае, когда каждая исходная компонента G_i этого произведения становится единичной группой при добавлении тождества $x^n = 1$.

Из этого критерия вытекает много интересных следствий о существовании различных классов бесконечных периодических простых групп. В работе [29] были получены следующие результаты.

Следствие 2. *Пусть даны нечетное число $n \geqslant 665$ и некоторое семейство групп* (18) *без инволюций. Если в каждой группе G_i можно указать систему порождающих элементов, каждый из которых имеет взаимно простой с числом n порядок, то периодическое произведение периода n этого семейства групп есть простая группа.*

Теорема 20. *В любом многообразии всех периодических групп данного нечетного периода nk, где числа n и k взаимно просты, $n \geqslant 665$ и $k > 1$, можно указать бесконечное множество неизоморфных конечно порожденных неабелевых простых групп.*

Теорема 20 дает положительный ответ на вопрос, поставленный в проблеме 23 из монографии Х. Нейман [52]. Для сравнения отметим, что, как было показано в статье [54], никакое бесконечное семейство известных конечных простых групп не может удовлетворять одному и тому же нетривиальному тождеству.

Спектром данной периодической группы мы называем множество порядков всех нетривиальных элементов этой группы.

Теорема 21. *Для всякого множества M нечетных простых чисел, содержащего хотя бы одно число $p > 665$, можно построить счетную периодическую простую группу H, для которой M является спектром. Если при этом множество M конечно, то построенная группа H имеет конечное число порождающих и ограниченную экспоненту.*

Отсюда также следует существование континуума различных счетных простых периодических групп.

Следует отметить, что с учетом замечания 4 утверждение критерия простоты для n-периодических произведений показателя $n \geqslant 665$ из работы [29] остается в силе вместе с приведенным там доказательством также и в случае, когда исходные группы-множители G_i могут содержать инволюции. Исключением является только вырожденный случай, когда исходное семейство состоит из двух групп порядка 2 и единственным возможным периодом является произведение ab двух инволюций, порождающих эти группы. В этом случае периодическое произведение совпадает со свободным произведением.

Более того, если рассматривается конструкция n-периодического произведения с учетом замечания 4, то этот же критерий простоты остается в силе вместе с доказательством и при любых четных $n = 2k \geqslant 665$. В частности, в таком случае исключаются также все периоды вида $A^k B^k$ (см. замечание 5).

Вспоминается, что именно такого рода контрпримеры заставили нас с П. С. Новиковым в 1962 *г. отложить* “*на время*” *исследование проблемы Бернсайда для четных периодов и сосредоточиться пока на исследовании групп нечетных периодов. Нам нужно было использовать понятие* “*родства*”, *чтобы производить одновременную периодизацию всех элементарных подслов в данном слове. Раз при исключении из числа активных периодов произведений двух инволюций во всех рангах лемма* II.5.21 *в* [9] *остается в силе, то все трудности с рассмотрением четного периода отпадают.*

Резюмируя, можно сказать, что если при конструкции n-периодических произведений во всех рангах α исключаются периоды, являющиеся произведениями двух инволюций ранга $\alpha - 1$, то доказанный в [29] критерий можно формулировать в следующем общем виде.

Критерий простоты 1. *Пусть даны произвольное число $n \geqslant 665$ и семейство нетривиальных групп* (18), *где либо $|G_i| > 2$ при некотором i, либо $|I| > 2$. Для того чтобы n-периодическое произведение* (19) *нечетного периода $n \geqslant 665$ семейства групп* (18) *было простой группой, необходимо и достаточно, чтобы каждая группа G_i совпадала со своей подгруппой, порожденной всеми n-ми степенями.*

Я хотел бы также обратить внимание на интересную работу С. В. Иванова [55], в которой было доказано, что при $n > 10^{10}$ нормальная подгруппа K, порождаемая периодическими словами вида A^n, по которой факторизуется свободное произведение (20) заданного семейства групп (18), чтобы получить n-периодическое произведение (19), в случае, когда исходные группы G_i не содержат инволюций, однозначно определяется утверждением теоремы 2 работы [28], а в общем случае, соответственно, однозначно определяется утверждением приведенной выше теоремы 18.

Я полагаю, что оба эти результата Иванова можно доказать для всех нечетных периодов $n \geqslant 665$.

В статье [55] также доказывается теорема 3, которая утверждает, что критерий простоты из работы [29] верен для всех периодов $n > 10^{10}$. Приведенный выше общий вариант критерия простоты 1 для всех $n \geqslant 665$ можно рассматривать как усиление этой теоремы 3.

Замечание 6. Возможность указанного выше простого устранения пробела, допущенного мной в работе [28], независимо от меня заметил и Ольшанский. Я узнал об этом в 1987 г., когда один из математических журналов РАН прислал мне на отзыв рукопись статьи [56], в которой на языке диаграмм ван Кампена для нечетных периодов $n > 10^{10}$ с подробным доказательством была описана аналогичная конструкция, представленная автором как "новая операция. В своем официальном отзыве на эту статью от 27 февраля 1987 г. я информировал редакцию журнала, а через них и автора рецензируемой рукописи, который со мной этот вопрос никогда не обсуждал, что допущенная в работе [28] неточность легко исправляется для всех нечетных $n \geqslant 665$ с помощью указанного выше замечания 4 и ссылки на уже опубликованное в монографии [9] доказательство ключевой леммы II.5.21. С учетом этого обстоятельства редакция журнала тогда отклонила представленную рукопись статьи [56], но автор опубликовал ее в другом журнале без каких-либо изменений или комментариев.

7. Некоторые результаты других авторов

О многих приложениях теории Новикова–Адяна было рассказано выше. Каждое новое приложение сопровождалось дальнейшим обогащением теории. Новая обогащенная версия теории Новикова–Адяна с усилением всех полученных до этого результатов была опубликована в монографии [9]. В книгу были включены и новые результаты, которые были получены за семь лет, прошедших после выхода работы [8]. В ходе подготовки монографии удалось также понизить нижнюю границу нечетной экспоненты с $n \geqslant 4\,381$ до $n \geqslant 665$.

Выбор редактора книги [9] был для меня однозначен. Им мог быть только Юрий Ильич Хмелевский – очень талантливый и высоко эрудированный ученый, воспитанник кафедры математической логики МГУ, ученик А. А. Маркова. Среди молодых логиков и алгебраистов на мехмате МГУ и в МИАНе он был самым подходящим во всех отношениях. Он еще в рукописи тщательно изучил и полностью разобрался во всех деталях доказательств, изложенных в этой книге. К сожалению, в последующие годы он мало уделял времени своим собственным научным исследованиям, так как был всецело увлечен лыжными походами на Северный полюс в знаменитых экспедициях команды Шпаро–Хмелевского, в организации и проведении которых он играл ключевую роль. Можно сказать, что он по существу был "душой команды" во время походов на Северный полюс (май 1979 г.) и потом через полюс в Канаду (см. [57]). В беседе со мной он признавался, что научную работу он порой приносит в жертву реализации своей мечты добраться до Северного полюса на лыжах. Будучи очень талантливым и широко эрудированным ученым, обладающим исключительно четким мышлением в математике, он бы мог получить замечательные результаты во многих областях математики, в том числе и в исследовании периодических групп и диофантовых уравнений (см. его статью [58]).

Хорошо известны также пионерские по тем временам работы Хмелевского по проблеме распознавания разрешимости уравнений в свободной полугруппе, которые были опубликовны в 1971 г. в отдельном томе Трудов Математического института им. В. А. Стеклова (том 107). В 1977 г. эта проблема была полностью решена Г. С. Маканиным не без влияния работ Хмелевского. Ю. И. Хмелевский умер на 60-м году жизни, когда, реализовав свою спортивную мечту, он успешно подготовил докторскую диссертацию и намеревался всецело вернуться в математику. Его преждевременная смерть была невосполнимой утратой для всех нас, его близких друзей и коллег.

При подготовке к печати монографии [9] естественно возникла необходимость как-то отметить опубликованную в 1973 г. статью [24] британского математика Джона Бриттона, известного своими интересными работами по алгоритмическим проблемам теории групп и по теории малых сокращений. В этой статье была предпринята попытка дать альтернативное доказательство бесконечности свободных периодических групп достаточно большого нечетного периода.

Меня настораживал тот факт, что, доказывая существование некоторого нечетного периода, начиная с которого группа $B(m,n)$ бесконечна, автор не указывал конкретное значение этой границы. Мы с редактором книги [9] Хмелевским решили проверить доказательства ключевых лемм в работе [24]. Проверка показала, что используемая Бриттоном система неравенств, на которых основано его доказательство, противоречива. Это противоречие было явно указано мной в предисловии к книге [9].

Публикация в 1975 г. монографии [9] с более доступным изложением теории Новикова–Адяна, а также появление вскоре после этого книги [59], в которой широко использовалась идея использования так называемых диаграмм ван Кампена в исследовании групп, задаваемых определяющими соотношениями, стимулировали читателей комбинировать идеи теории Новикова–Адяна с техникой диаграмм ван Кампена для построения новых интересных примеров групп с наперед заданными свойствами (см., например, [60], а также [61]).

Как уже отмечалось в обзорной статье [47] (стр. 15), Илья Рипс в 1978 г. в своих лекциях в Великобритании (в Лондоне и в Варвике) заявил, что он построил примеры 2-порожденной бесконечной периодической группы, все собственные подгруппы которой – циклические данного простого порядка (так называемые *монстры Тарского*). До нас дошли записки этих лекций, которые в Лондоне записывал Бриттон, а в Варвике – Ф. Пиккел. Доказательство основывалось на некоторых обобщениях теории малых сокращений, излагаемых на языке диаграмм ван Кампена (см. [61]). К сожалению, Рипс не успел опубликовать доказательство основного результата. В 1982 г. были опубликованы статьи Ольшанского [32] и [62]. В частности, в статье [62] было доказано существование монстра Тарского для простых периодов $n > 10^{78}$. Впрочем, в этой статье нет упоминания об указанных лекциях Рипса 1978 г.

А. Ю. Ольшанский впервые рассмотрел геометрическую модификацию метода Новикова–Адяна с использованием диаграмм ван Кампена в работе [60] в урезанном виде, т. е. без ограничения на периоды в определяющих соотношениях. В ней была опровергнута гипотеза Бэра о том, что любая нётерова группа является почти полициклической. Точнее, была построена группа, которая не является конечным расширением полициклической группы и при этом не имеет бесконечных возрастающих цепочек подгрупп.

В статье [60] автор в следующей форме (см. с. 1328) отмечает тот факт, что он использует изложенные в монографии [9] идеи и понятия:

"*Другой особенностью статьи является доказательство большого числа лемм сложной совместной индукцией по натуральному параметру* i, *который, следуя примеру работ* [6]–[8], *мы называем рангом. Кроме того, как и в* [6]–[8], *построение группы осуществляется последовательным добавлением определяющих соотношений новых рангов, а периодические слова играют важную роль. Для нескольких сложных понятий употреблены названия, введенные С. И. Адяном и П. С. Новиковым* [6]–[8]...".

Автор здесь ссылается на первоначальную версию теории Новикова–Адяна, изложенную в [8], а не на усовершенствованную и обогащенную версию, изложенную через семь лет в книге [9]. Любопытно, что в своих дальнейших публикациях, где будут использоваться также и более глубокие идеи и результаты из монографии [9] и других работ автора, он ссылается на эту свою работу, говоря о том, что он развивает подход, предложенный им же в работе [60]. Из работ Новикова и Адяна упоминаются только конкретные теоремы.

Во второй работе [63] Ольшанский на основе первой работы построил бесконечную неабелеву периодическую группу неограниченного периода, любая собственная подгруппа которой имеет простой порядок, решив тем самым известную проблему О. Ю. Шмидта. Это был некоторый шаг к построению монстра Тарского.

Я с самого начала высоко оценил предпринятые Ольшанским в работах [60] и [63] попытки переводить теорию Новикова–Адяна на язык диаграмм ван Кампена и в своем отзыве на его докторскую диссертацию, которая была на другую тему, писал: "Ольшанский заслуживает докторской степени уже за то, что он разобрался в сложной теории Новикова–Адяна, начал переводить ее на язык диаграмм ван Кампена и уже получил два замечательных результата в работах [60] и [63]". В этих работах он перевел весьма урезанную версию этой теории без самого главного условия: равномерного ограничения показателей в используемых определяющих соотношениях. Но все равно для рецензирования этих работ нужно было привлечь квалифицированного человека, разбирающегося в теории Новикова–Адяна. Поэтому именно Хмелевский был выбран в качестве рецензента. Он рецензировал эти две работы для журнала "Известия". Затем для журнала "Математический сборник" он рецензировал третью работу Ольшанского [32], в которой автор опубликовал более короткое изложение доказательства теоремы Новикова–Адяна для нечетных периодов $n > 10^{10}$ на языке диаграмм ван Кампена.

Весьма любопытно, что в статье [32] появились и некоторые отголоски техники, изложенной в статье Бриттона [24], например, использование большого числа промежуточных дробных параметров и неравенств между ними. Более того, при рецензировании первоначальной версии статьи [32] Хмелевский обнаружил ошибочность некоторых неравенств и указал их, заметив при этом:

“*Важное место в работе занимают соотношения* (*неравенства*) *между параметрами*, *на которых основаны доказательства и проверка которых предоставлена читателю. Заметим*, *что эту проверку читателю иногда нелегко осуществить из-за значительного объема вычислений. Вероятно*, *по этой причине некоторые неравенства оказались неверными*, *например* ...”.

Автор эти ошибки исправил, но рецензента не поблагодарил. Ссылок на работу Бриттона тоже нет ни в этой, ни в других работах Ольшанского.

Критикуя нежелание Ольшанского указывать аналогию между его подходом и подходом Новикова–Адяна, Хмелевский составил словарь терминов на нескольких страницах, в котором явно указывалось соответствие между основными понятиями и леммами, используемыми в книге [9] и в статье [32]. Некоторые из этих соответствий уже были указаны ранее в обзорной статье [47]. В своем официальном отзыве на рукопись статьи [32], копия которого у меня сохранилась, Хмелевский отмечает также, что трудность в нахождении аналогий связана с тем, что в [32] все основные понятия переведены на язык диаграмм ван Кампена, а “краткость доказательства в значительной степени определяется конспективностью изложения, порой в ущерб интересам читателя”.

Приведенное в статье [32] доказательство ослабленного варианта теоремы Новикова–Адяна имеет две характерные особенности.

Во-первых, как и в статьях [60] и [63], все излагается в терминах диаграмм ван Кампена.

Во-вторых, так же, как это делалось в книге [9], начиная со свободной группы, строятся последовательные аппроксимации $B(m,n,i)$ группы $B(m,n)$ путем прибавления к уже построенной группе $B(m,n,i-1)$ новых определяющих соотношений ранга i. При этом периоды для этих соотношений выбираются среди тех слов, которые в предыдущем ранге имеют бесконечный порядок.

Отличие же состоит в том, что в работе [32] в очередном ранге i добавляется только одно новое определяющее соотношение вида A^n, где A есть кратчайшее в лексикографическом упорядочении слово, имеющее бесконечный порядок в группе $B(m,n,i-1)$. Тот факт, что при этом в пределе получится задание свободной бернсайдовой группы $B(m,n)$, является очевидным.

Такое простое описание системы определяющих соотношений группы $B(m,n)$ весьма заманчиво и даже на первый взгляд гипнотизирует непосвященного читателя. Однако такой “простой” выбор следующего определяющего соотношения (см. замечание 2 в конце раздела 2) создает новые трудности. Именно из-за этого Ольшанскому пришлось использовать большое число дробных параметров и сложных неравенств между ними вместо того, чтобы ограничиться применением диаграмм ван Кампена к теории, изложенной в книге [9].

При этом ему пришлось поднять границу для периода n в десятки миллиардов раз, точнее, до $n > 10^{10}$.

Ольшанский специально подчеркивает в начале статьи [32], что он докажет, что полученная система определяющих соотношений является независимой. Но он "забывает" при этом отметить, что возможность задания группы $B(m,n)$ с помощью независимой системы определяющих соотношений вида $A^n = 1$ была доказана В. Л. Ширваняном еще в 1976 г. и опубликована в том же журнале "Математический сборник" (см. [31]), где позже была опубликована его собственная статья [32].

К сожалению, автор не только не отмечает это обстоятельство, но и совсем избегает ссылок на работу Ширваняна [31] как в этой статье, так и в своей монографии.

Для объективного сравнительного анализа двух доказательств, изложенных в [9] и [32], нужно подробно ознакомиться с обеими работами. Такая возможность была у Хмелевского. Как было указано в замечании 2, когда я попросил И. Г. Лысёнка тоже прочитать и сравнить эти два доказательства, оказалось, что он читал сначала текст Ольшанского, а потом уже монографию [9]. На мою просьбу сравнить эти два доказательства Лысёнок ответил кратко следующей фразой:

"Только после чтения Вашей книги [9] я по-настоящему понял доказательство, изложенное в статье Ольшанского [32]", – сказал он. Этот разговор происходил на моем семинаре в присутствии ученика Ольшанского В. Губы.

Оказалось, что Ольшанский не рекомендовал своим ученикам читать монографию [9], ссылаясь на сложность доказательства.

Многочисленные результаты, полученные на базе подхода Ольшанского им самим и его учениками, приведены в книге [64]. Наиболее интересным из них следует признать его результат 1982 г. о существовании для простых $n > 10^{78}$ бесконечной 2-порожденной группы, все собственные подгруппы которой циклические порядка n (так называемые *монстры Тарского*, см. [62]). В статье [65] этот результат был распространен на все нечетные $n > 10^{78}$. Как было отмечено выше, заявку на такой же результат сделал Рипс в своих лекциях, прочитанных в Великобритании в конце 70-х годов.

В 1989 г. во время одной беседы на мехмате МГУ в ответ на мое замечание, что все интересные результаты, доказанные с помощью подхода Ольшанского, можно доказать для меньших значений периода n с помощью теории Новикова–Адяна, изложенной в книге [9], один из учеников А. Ю. Ольшанского С. В. Иванов высказал сомнение в том, что монстры Тарского можно построить, используя только оригинальную теорию Новикова–Адяна, изложенную в книге [9]. Для опровержения этой иллюзии мы с И. Г. Лысёнком обещали представить такое доказательство и в 1991 г. опубликовали совместную работу [66], в которой была доказана следующая теорема, дающая при простом n монстр Тарского для любых $n \geqslant 1\,003$.

Теорема 22. *Для любого нечетного периода $n \geqslant 1\,003$ существует 2-порожденная бесконечная группа, всякая собственная подгруппа которой содержится в некоторой циклической подгруппе порядка n.*

Доказательство этой теоремы было проведено на оригинальном языке монографии [9] и основано на изложенной в последней главе этой книги технике при тех же значениях периода $n \geqslant 1\,003$. После этого не осталось никаких сомнений в том, что используемый А. Ю. Ольшанским подход есть несколько упрощенная и ослабленная модификация метода Новикова–Адяна с использованием геометрического языка диаграмм ван Кампена. Разумеется, это не умаляет значение результатов, полученных А. Ю. Ольшанским и его учениками с использованием диаграмм ван Кампена. Беда в том, что многие из этих результатов представляют интерес и для меньших периодов, а для них они не доказаны. Кстати, это нелегкая работа, даже при наличии доказательств, проведенных методом Ольшанского.

Среди наиболее интересных работ, полученных с помощью техники Ольшанского, можно также упомянуть работу В. С. Губы [67], в которой впервые были построены 2-порожденные полные группы, т. е. группы, в которых из каждого элемента можно извлечь (однозначный) корень любой степени k. Попутно им был указан пример нециклической 2-порожденной группы, в которой каждый элемент сопряжен некоторой степени фиксированного элемента. В [68] Губа доказал, что существует конечно порожденная простая группа, все 2-порожденные подгруппы которой свободные. Тем самым получен ответ на вопрос Уайголда о существовании конечно порожденной простой группы, которая не является 2-порожденной.

Очень важное продвижение в исследовании проблемы Бернсайда в 90-е годы было достигнуто в работах двух талантливых представителей московской математической школы С. В. Иванова [69] и И. Г. Лысёнка [70].

Вспоминается, что в конце 80-х годов С. В. Иванов и И. Г. Лысёнок оба прослушали мой спецкурс по монографии [9], который я тогда прочитал на мехмате МГУ в очередной раз после перерыва. В курсе обсуждались все аспекты проблемы Бернсайда, в том числе трудности, возникающие при применении теории Новикова–Адяна для четных периодов. Вскоре Иванов уехал в США.

В 1992 г. почти одновременно Иванов и Лысёнок анонсировали, что установили бесконечность свободных периодических групп $B(m,n)$ для достаточно больших четных периодов n (см. [71] и [72]). Через несколько лет они опубликовали свои результаты.

Иванов в работе [69] доказал бесконечность групп $B(m,n)$ для периодов вида $n = 2^9k \geqslant 2^{48}$.

И. Г. Лысёнок в работе [70] доказал бесконечность групп $B(m,n)$ для периодов вида $n = 16k \geqslant 8\,000$.

В статье Иванова [69] рассматриваемая техника распространяется не "на все периоды $n \geqslant 2^{48}$ независимо от нечетности", как он обещал в своем анонсе, а только на периоды вида $n = 2^9k \geqslant 2^{48}$. Применяемая Лысёнком техника, также использующая диаграммы ван Кампена, но построенная по схеме оригинальной теории Новикова–Адяна, позволяет исследовать группы $B(m,n)$ для периодов вида $n = 16k \geqslant 8\,000$. Как видим, оба автора были вынуждены наложить на рассматриваемые периоды условие наличия достаточно большого четного множителя вида 2^s. В обоих доказательствах к традиционной системе утверждений, доказываемых совместной индукцией по рангу α, добавляются новые утверждения, характеризующие структуру конечных подгрупп группы $B(m, n)$.

В обоих доказательствах в ходе традиционной совместной индукции по рангу α попутно доказывается важное для четного случая описание конечных подгрупп, которое в более сильной работе Лысёнка формулируется так.

Теорема 23. *Пусть $m > 1$ и $n = 2^4k \geqslant 8\,000$. Тогда любая конечная подгруппа группы $B(m,n)$ изоморфно вкладывается в конечное прямое произведение*

$$\mathbf{D}_n \times \mathbf{D}_{\bar{n}} \times \cdots \times \mathbf{D}_{\bar{n}},$$

где $\mathbf{D}_r$ – диэдральная группа порядка $2r$ и $\bar{n}$ есть наибольший делитель вида 2^k числа n.

Для сравнения напомним, что в книге [9] было установлено, что при нечетных периодах $n \geqslant 665$ конечные подгруппы группы $B(m, n)$, так же как и все абелевы подгруппы, являются циклическими группами, порядки которых делят n.

Именно после моего доклада в Беркли в 1975 г., где упоминались эти результаты, А. Тарский поставил вопрос о существовании такого бесконечного **монстра**, в котором все собственные подгруппы циклические одного порядка.

Любопытно, что Иванов на с. 258 своего анонса [71] специально отметил таинственную неопубликованную работу под номером 5, которая так и не была опубликована до сих пор. Эта ссылка Иванова косвенно подчеркивает, что в 1992 г., анонсируя в [71] свой результат для четных периодов, он еще не знал, что нужно будет наложить на период дополнительное условие наличия четного множителя 2^9. Иначе он не стал бы акцентировать внимание на случаях, когда четный делитель экспоненты равен 2 или 4, как на более простых. Как известно, вопрос о возможности распространения теории Новикова–Адяна на такие случаи пока остается открытым, хотя бесконечность группы $B(m, n)$ в этих случаях тривиально следует из теоремы Новикова–Адяна для нечетных периодов. По этому вопросу см. также [73].

Манера бесконтрольно цитировать свои “неопубликованные статьи” практиковалась С. В. Ивановым и ранее. Так, например, в библиографии к совместной статье Иванова и Ольшанского [74] были указаны 10 неопубликованных статей Иванова, из которых 8 не опубликованы до сих пор, хотя с тех пор прошло более 20 лет. Странным образом, среди них оказалась и рукопись под названием “*Проблема равенства в моноидах с* 1 *определяющим соотношением разрешима*”, хотя мне хорошо известно, что Иванов на эту тему никогда ничего не публиковал.

Заметим также, что статья Лысёнка с доказательством бесконечности групп $B(m, n)$ при $n = 16k \geqslant 8\,000$ (в английской версии) заняла 202 страницы, а статья Иванова [69] с доказательством для периодов $n = 2^9k \geqslant 2^{48}$ заняла 307 страниц. Как видим, доказательство Лысёнка короче в полтора раза, а результат сильнее на несколько порядков. Дело в том, что оба автора использовали экономный язык диаграмм Ван Кампена, а схемы индукции они использовали разные. Иванов проводил индукцию по так называемой “упрощенной” схеме, изложенной в книге Ольшанского [64], а Лысёнок проводил индукцию по схеме, изложенной в монографии [9].

Этот факт еще раз подтвердил необоснованность утверждений о том, что опубликованное Ольшанским в статье [32] и его книге [64] доказательство теоремы Новикова–Адяна существенно проще, чем то, что изложено в книге [9]. Такой миф распространялся кулуарно некоторыми отечественными алгебраистами, которые практически не читали ни то, ни другое доказательство, но были явно недовольны тем, что крупная алгебраическая проблема в самом трудном и важном случае была решена комбинаторными методами, берущими свое начало в математической логике и теории алгоритмов. Нескрываемое недовольство вызывало также активное участие Адяна в решении проблемы Бернсайда. Красноречивым проявлением такого отношения ко мне явилось вычеркивание фамилии С. И. Адяна из редакционной статьи журнала “Известия АН СССР. Серия математическая”, (см. [75; с. 1188, строка 21 сверху]). Заместитель главного редактора в корректуре заменил фамилию Адяна словами “и одного из его учеников”, несмотря на возражение П. С. Новикова.

Возможно, Шафаревичу легче было бы составить адекватное представление об этих работах, если бы кто-нибудь из активных представителей его школы разобрался в теории Новикова–Адяна. Это мог бы сделать Ю. И. Манин, интерес которого к математической логике и алгоритмическим проблемам известен. К сожалению, по тем или иным причинам они этого не сделали.

Как было отмечено в официальном отзыве Хмелевского на статью [32], в работе Ольшанского краткость в основном была достигнута благодаря изложению доказательств на языке диаграмм ван Кампена и конспективности их изложения. Иванов в работе [69] доказывал новый результат и потому не мог писать конспективно.

Вот как описывал сложность доказательства основного результата книги [9] В. Магнус в упомянутой выше монографии по истории комбинаторной теории групп [10] (см. гл. I.6, с. 57):

“Возможно, эта работа является самой трудной для чтения среди всех работ по математике, которые когда-либо были написаны. Дело не только в ее длине. Существуют и другие очень длинные работы, даже в теории групп, например доказательство Фейта и Томпсона [76] того, что группы нечетного порядка являются разрешимыми. Но по крайней мере читатель, знакомый с теорией конечных групп и их представлений, на протяжении всей работы Фейта и Томпсона будет сталкиваться со знакомыми терминами и с употреблением знакомых ему теорем. В работе Новикова и Адяна все обстоит иначе. Ее нужно читать слово за словом, с самого начала. Доказательство основано на чрезвычайно сложных комбинаторных рассуждениях.

Само собой напрашивается сравнение влияния проблемы Бернсайда на комбинаторную теорию групп с влиянием последней теоремы Ферма на развитие алгебраической теории чисел”.

Курт Гёдель, решивший две главные проблемы Гильберта по основаниям математики из известной серии 23 проблем: проблему континуума и проблему построения непротиворечивой и полной теории для всей математики (теорема Гёделя о неполноте арифметики), во время нашей беседы в Принстоне в 1975 г. перед моим докладом по проблеме Бернсайда сказал мне, что этот доклад является одним из двух наиболее интересных для него докладов, прочитанных в Принстоне за последние 15 лет. На мой вопрос о том, какой же был предыдущий доклад, на который ему хотелось пойти, он ответил: “*Это был доклад А. Робинсона о нестандартном анализе*”. Он очень сожалел, что П. С. Новиков не смог тоже приехать в Принстон для встречи с ним; он приглашал нас обоих еще в 1969 г., но тогда в Москве нам не дали выездную визу.

К сожалению, один из признанных мировых лидеров в области приложений идей и методов математической логики в исследованиях алгебраических проблем, академик А. И. Мальцев, ожидавший с нетерпением завершение нашего доказательства, так и не смог ознакомиться с ним. Анатолий Иванович скоропостижно скончался за два месяца до того, как наша статья с полным доказательством была представлена в редакцию журнала.

В заключение этого раздела я хотел бы указать еще на ряд интересных результатов, в той или иной степени продолжающих указанные выше исследования.

В работе [77] А. Ю. Ольшанский показал, что описанную им в книге [64] версию теории Новикова–Адяна по описанию нормальной подгруппы G^n группы G посредством распределения определяющих соотношений по рангам можно реализовать на базе гиперболических групп G, т. е. начиная с заданной гиперболической группы, удовлетворяющей определенным условиям. Ранее это делалось для свободных групп при решении проблемы Бернсайда и для свободных произведений групп при построении n-периодических произведений, введенных в работе [28]. Он доказал, что для всякой нециклической гиперболической группы G без кручения существует такое целое $n(G)$, что факторгруппа G/G^n бесконечна для любого нечетного $n > n(G)$. Позже в работе [78] Иванов и Ольшанский установили, что аналогичную конструкцию можно получить и при достаточно больших четных n, но только при условии, что группа G не является конечным расширением бесконечной циклической.

В статье [79] Иванов и Ольшанский, опираясь на работу [69], исследовали бесконечные локально конечные подгруппы группы $B(m,n)$ для четных экспонент $n = 2^9k \geqslant 2^{48}$. В частности, они доказали, что централизатор конечной 2-подгруппы группы $B(m,n)$ содержит подгруппу, изоморфную группе $B(\infty,n)$ бесконечного ранга, а централизатор конечной подгруппы, не являющейся 2-подгруппой, группы $B(m,n)$ конечен.

В работе [80], используя конструкцию монстра Тарского из совместной работы автора и И. Г. Лысёнка [66], В. С. Атабекян доказал, что группы $B(m,n)$ не удовлетворяют условиям минимальности и максимальности для нормальных подгрупп при нечетных $n \geqslant 1\,003$ и любых $m > 1$.

В этой же работе доказано, что для любых $m \geqslant k \geqslant 2$ группа $B(m,n)$ аппроксимируется группой $B(k,n)$.

Используя идею построения монстров Тарского, В. Н. Образцов в работе [81] дал отрицательный ответ на довольно интересный вопрос Ф. Холла, построив пример группы, которая изоморфна каждой своей нетривиальной нормальной подгруппе.

В [82] Д. Осин доказал, что при нечетных $n > 10^{78}$ группы $B(m,n)$ равномерно неаменабельны.

В [83] В. Атабекян существенно усилил этот результат Осина, доказав что при всех нечетных $n \geqslant 1\,003$ равномерно неаменабельны как группа $B(m,n)$, так и все ее нециклические конечно порожденные подгруппы. Из этого результата для нечетных $n \geqslant 1\,003$ следует, что все бесконечные подгруппы группы $B(m,n)$ имеют экспоненциальный рост по любой системе порождающих, причем все эти экспоненты равномерно ограничены снизу некоторой экспонентой.

В "Коуровской тетради" [84] мной был поставлен следующий вопрос: *Верно ли, что все собственные нормальные подгруппы группы $B(m,n)$ простого периода $n > 665$ не являются свободными периодическими группами*? В работе [85] был получен положительный ответ на этот вопрос, но только для простых периодов $n > 10^{78}$.

Недавно Атабекян в работе [86] доказал, что это утверждение верно для всех простых $n > 997$. В своем доказательстве Атабекян использует конструкцию монстров Тарского, построенных в работе [66] для любых нечетных периодов $n \geqslant 1\,003$. В той же работе [86] доказано, что при нечетных $n \geqslant 1\,003$ любая свободная в многообразии всех n-периодических групп подгруппа группы $B(m,n)$ совпадает со своим нормализатором. В [85] это утверждение также было доказано только для $n > 10^{78}$.

В работе [87] Атабекян доказал, что каждая нециклическая подгруппа группы $B(m,n)$ при любом нечетном $n \geqslant 1\,003$ содержит подгруппу, изоморфную периодической группе $B(\infty,n)$ бесконечного ранга. Тем самым был получен положительный ответ на вопрос из "Коуровской тетради".

В работе [88] Атабекян доказал, что для каждого нечетного $n \geqslant 1\,039$ существуют слова $u(x,y)$, $v(x,y)$ над групповым алфавитом $\{x,y\}$ такие, что если a, b – любые два некоммутирующих элемента свободной бернсайдовой группы $B(m,n)$, то для некоторого k элементы $u(a^k,b)$, $v(a^k,b)$ свободно порождают свободную бернсайдову подгруппу группы $B(m,n)$. Похожий результат был анонсирован Ивановым в статье [74] за 20 лет до этого, но его доказательство так и не появилось.

Из тривиальности центра группы $B(m,n)$ (см. теорему 7) непосредственно следует, что группа внутренних автоморфизмов $\operatorname{Inn}(B(m,n))$ группы $B(m,n)$ изоморфна самой группе $B(m,n)$. В терминах так называемых *точных последовательностей* это означает, что цепочка гомоморфизмов

$$0 \to B(m,n) \to \operatorname{Aut}(B(m,n)) \to \operatorname{Aut}(B(m,n))/\operatorname{Inn}(B(m,n)) \to 0$$

является точной.

В работе 2006 г. [89] Е. А. Черепанов доказал, что при нечетных $n > 10^{78}$ автоморфизмы группы $B(m,n)$, которые стабилизируют все нормальные подгруппы, являются внутренними.

Недавно в работе [90] Атабекян доказал, что это утверждение верно для всех нечетных $n \geqslant 1\,003$.

8. Проблема Бернсайда–Магнуса, эффективные оценки

Как уже было отмечено в начале статьи, так называемая "ослабленная проблема Бернсайда" была сформулирована в работе Магнуса [11] и названа им "Restricted Burnside problem", а термин "ослабленная проблема Бернсайда" был введен Сановым в работе [13]. Суть этой проблемы заключается в том, чтобы для данной пары чисел (m, n) ответить на вопрос, существует ли максимальная конечная периодическая группа с данным числом порождающих m и фиксированным периодом n, и если существует, то найти или оценить ее порядок. Такая гипотетическая группа получила обозначение $R(m, n)$.

Окончательной формулировке этой проблемы в работе Магнуса [11] предшествовали предпринятые в 40-х годах исследования по периодическим группам в работах ряда немецких математиков, начатые Магнусом в работах [91], [92], продолженные в работах О. Грюна [93] и Г. Цассенхауза [94] и завершенные в работе 1950 г. [11]. В этой работе вопрос о существовании максимальной конечной периодической группы $R(m, n)$ при простых $n = p$ был сведен Магнусом к вопросу о локальной нильпотентности алгебры Ли над полем $\mathbb{Z}_p$, удовлетворяющей тождеству Энгеля E_{p-1}:

$$[xy^{p-1}] = [\ldots[[x, y], y], \ldots, y] = 0. \tag{26}$$

Там же он ввел термин "Restricted Burnside problem", подчеркивая тем самым, что она произошла от проблемы Бернсайда. В [11] это сведение было доказано для простых $n = p$ (см. также [12; теорема 5.23]). Позже Санов в [13] распространил это сведение на любые степени $n = p^\alpha$.

Этой проблемой впоследствии занимались многие авторы. При этом обычно исследуются не сами периодические группы, а алгебры Ли с соответствующим тождеством Энгеля, а затем на основании указанной выше редукции Магнуса полученные результаты переносятся на конечные периодические группы.

Более подробную информацию об истории этих исследований читатель найдет также в книге [10].

Как уже отмечалось выше, в 1987 г. в работе [26], посвященной конструктивному доказательству существования максимальной конечной периодической группы $R(m, p)$ для любых простых периодов p, мы с А. А. Разборовым предложили называть эту проблему на русском языке "**проблемой Бернсайда–Магнуса**", чтобы подчеркнуть тем самым историческую роль Магнуса в возникновении этой проблемы и в нахождении основного подхода к ее решению.

Кроме того, не имея ничего против введенного Магнусом термина "Restricted Burnside problem" для употребления в англоязычных текстах, я не могу признать удачным перевод его на русский язык как "ослабленная проблема Бернсайда". Как уже было отмечено в начале данной статьи, этот термин на русском языке был навеян Санову его надеждой на положительное решение самой проблемы Бернсайда. Наконец, в постановке Бернсайда не было речи о максимальной конечной периодической группе для данных m и n, а ставился вопрос о локальной конечности периодических групп с данным тождеством $x^n = 1$.

Поэтому я вынес в заголовок данного раздела вполне естественное название рассматриваемой проблемы, которое отражает как тот факт, что она исторически возникла из основной проблемы Бернсайда, так и важную роль, которую сыграл Магнус в истории этого вопроса. Этого требует здравый смысл, а также элементарная справедливость.

К большому сожалению, в последние годы у некоторых авторов сложилась порочная практика даже в обзорных статьях скрывать от читателя тот факт, что термин "Restricted Burnside problem" и связанный с энгелевыми алгебрами Ли подход к ее решению были предложены В. Магнусом. Парадоксально, что в обзорной статье [95] имя Магнуса загадочным образом не упоминается вовсе.

Очень важную роль при получении оценок порядков конечных периодических групп составного периода n играет известная теорема Ф. Холла и Г. Хигмана, доказанная в работе [96].

Теорема 24. *Пусть $n = p_1p_2\cdots p_k$, где p_i – попарно различные простые числа. Если для любого m и любого s, делящего n, порядок группы $R(m,s)$ не больше $\gamma(m,s)$, то порядок группы $R(m,n)$ не больше*

$$\gamma(m,n) = \prod_{i=1}^{k} \gamma(m_i, p_i), \tag{27}$$

где $m_i \rightleftharpoons 1 + (m-1)\gamma(m, n/p_i)$.

В 1985 г. появилась рукопись книги Кострикина под названием "Вокруг Бернсайда" [25] и издательство попросило меня написать рецензию на нее. Нужно было проверить строгость доказательства, так как были нарекания на предыдущие публикации автора на эту тему. Мы с моим аспирантом А. А. Разборовым проверили все вычисления в [25] и пришли к выводу, что приведенное там доказательство можно считать полным.

При чтении рукописи книги Кострикина я обратил внимание на гипотезу, которая была сформулирована автором в п. 5.1 главы 6 рукописи книги. Суть ее заключалась в том, что ступень нильпотентности $\gamma_2(n)$ свободной лиевой алгебры с двумя порождающими над полем характеристики p при $n = p-1$, удовлетворяющей тождеству Энгеля $[u, v^n] = 0$, растет как квадратичная функция. В качестве аргумента для такого предположения автор приводил только тот факт, что Ф. М. Малышев доказал, что эта функция растет быстрее любой линейной функции n. Я предложил автору не включать ее в эту книгу, так как считал, что здесь более вероятна экспоненциальная нижняя оценка. Но автор решил оставить ее. Тогда я предложил своему ученику Н. Н. Репину вместе доказать мое предположение, что искомая нижняя оценка экспоненциальна. Вскоре мы подготовили совместную статью с доказательством утверждения, что начиная с некоторого N указанная выше функция $\gamma_2(n)$ растет быстрее, чем $2^{n/15}$. Эта статья была опубликована в журнале "Математические заметки", в результате чего уже в корректуре книги автор убрал указанную гипотезу, заменив ее ссылкой на нашу статью с Репиным [97]. В английском переводе книги гипотеза Кострикина исчезла совсем.

В 1988 г. мы с Репиным опубликовали еще одну совместную работу [98], в которой распространили полученную экспоненциальную оценку на периодические группы $R(2,p)$. В этой работе была доказана следующая теорема.

Теорема 25. *Существует такое натуральное число N, что при всех простых $p > N$ выполнено неравенство*

$$\dim L(R(2,p)) > 2^{p/15.5}$$

и, следовательно, для порядка группы верна оценка

$$|R(2,p)| > p^{2^{2^{p/15.5}}}.$$

Можно отметить, что эта асимптотическая нижняя оценка никем не улучшена.

В книге Кострикина [25] доказательство теоремы о локальной нильпотентности лиевых алгебр с условием Энгеля, как и в его ранних статьях, проводится методом от противного. Он получает противоречие, исходя из предположения, что рассматриваемая лиева алгебра L, удовлетворяющая тождеству Энгеля $[\dots[[x,y],y],\dots,y] = 1$ степени $p-1$, не совпадает со своим максимальным нильпотентным радикалом. При этом он неоднократно подчеркивал, что не видно никаких подходов для конструктивного доказательства, которое давало бы возможность найти верхнюю оценку ступени нильпотентности и порядка максимальной конечной периодической группы $R(m,p)$. В частности, в п. 5.15 главы 6 (с. 184) книги [25] он писал: “*Традиционное замечание о желательности конструктивного доказательства теоремы* 4.1, *увы*!, *остается вне пределов разумных советов*: *такое доказательство пока недосягаемо даже для сравнительно небольших n*”.

Мы с А. А. Разборовым не разделяли такой пессимизм автора и решили найти конструктивное решение рассматриваемой проблемы.

Эффективное решение проблемы Бернсайда–Магнуса с указанием примитивно рекурсивной оценки сверху порядков групп $R(m,p)$ при любых целых m и простых p впервые было получено нами в 1986 г. Оно было подробно изложено в нашей совместной статье [26]. Так же как и все известные результаты по проблеме Бернсайда–Магнуса, наше доказательство основывается на связи между периодическими группами и алгебрами Ли, которую указал Магнус.

Нижний центральный ряд любой группы G определяет связанную с ней алгебру Ли. Эта связь основывается на коммутаторных тождествах, которые восходят к Ф. Холлу [99]. Она становится прозрачной, если эти тождества записать по модулю членов нижнего центрального ряда рассматриваемой группы G, который определяется равенствами

$$G_1 = G \quad \text{и} \quad G_{i+1} = [G_i, G] \qquad (i = 1, 2, \dots).$$

Группе G сопоставляется лиево кольцо $L(G)$, которое является декартовой суммой $\bigoplus_{i=1}^{\infty} L_i(G)$ аддитивно записанных факторгрупп $L_i(G) = G_i/G_{i+1}$, в которой операция сложения совпадает с операцией сложения в декартовой сумме, а лиево произведение $[xy]$ для однородных элементов $x \in L_i(G)$ и $y \in L_j(G)$ определено как групповой коммутатор $[x, y]$, взятый по модулю G_{i+j+1}, и распространено на любые суммы на основе соотношений дистрибутивности. То, что $L(G)$ есть лиево кольцо, легко проверяется. Если в группе выполнено тождество $x^n = 1$, то в аддитивной группе $L(G)$ будем иметь тождество $nx = 0$. Если при этом n есть простое число $= p$, то, как показал Цассенхауз в [94], в группе G выполнено тождество $[y, x^{p-1}] = 1$. Этому тождеству группы G в лиевой алгебре $L(G)$ соответствует тождество

$$[y, x^{p-1}] = 0, \tag{28}$$

где $[y, x]$ есть умножение в алгебре $L(G)$. Оно обычно называется тождеством Энгеля. Таким образом периодической группе G простого периода p сопоставляется лиева алгебра над полем $\mathbb{Z}_p$, удовлетворяющая тождеству Энгеля.

В работе [26] мы впервые дали прямое конструктивное доказательство следующего основного результата.

Теорема 26. *Всякая r-порожденная алгебра Ли L с тождеством Энгеля степени n над полем характеристики $p > n$ или $p = 0$ нильпотентна и ее ступень нильпотентности не превосходит числа*

$$\psi(n, r) \rightleftharpoons F\bigl(n, r, N(n, 10) \cdot 6^{n+12}\bigr), \tag{29}$$

где $F(n, r, \alpha)$ – функция, определяемая примитивной рекурсией

$$F(n, r, 0) = 1, \qquad F(n, r, \alpha + 1) = nr^{3F(n,r,\alpha)},$$

а $N(n, r)$ – функция, определяемая примитивной рекурсией

$$N(n, 4) = 6, \qquad N(n, r + 1) = F\bigl(n, r + 1, N^2(n, r) \cdot 3^{(n+6)/2}\bigr).$$

Из теоремы 26 следует, что для любого простого p всякая r-порожденная алгебра над полем характеристики p, удовлетворяющая тождеству Энгеля E_{p-1}, имеет ступень нильпотентности $\leqslant \psi(p-1, r)$. А так как конечная группа $R(r, p)$ тоже нильпотентна, то отсюда в силу указанного Магнусом соответствия между группой $R(r, p)$ и алгеброй $L(R(r, p))$ следует, что конечная p-группа $R(r, p)$ также имеет ступень нильпотентности $\leqslant \psi(p - 1, r)$. В силу известной теоремы Витта (см. [100; теорема 11.2.2, с. 190]) размерность однородных компонент $L(R(r, p))_d$ оценивается сверху формулой

$$\dim L(R(r, p))_d \leqslant \frac{1}{d} \sum_{i|d} \mu(i) r^{d/i} \leqslant \frac{r^d}{d}\,.$$

Отсюда в силу теоремы о базисе (см. [100; теорема 11.2.4, с. 196]) получаем следующую оценку для порядка максимальной конечной r-порожденной группы периода p:

$$|R(r, p)| \leqslant p^{\sum_{d=1}^{\psi(p-1,r)} r^d/d} < p^{r^{\psi(p-1,r)}}.$$

В основе доказательства теоремы 26 в [26] лежит серия условных тождеств вычислительного характера, большинство которых (но не все) фактически содержались в монографии [25]. Некоторые из них более или менее очевидны. Но для доказательства многих из них требуются весьма нетривиальные вычисления.

Для удобства читателя в [26] все квазитождества мы привели с доказательствами. Это было вызвано тремя причинами. Во-первых, не все нужные нам квазитождества имели аналоги в монографии [25]. Во-вторых, для некоторых квазитождеств содержащиеся в [25] доказательства сопровождаются попутным рассмотрением различных неравенств, связанных с определением так называемого "сэндвича". Как это видно из нашего доказательства, без этих неравенств можно обойтись. В-третьих, в своем доказательстве от противного Кострикин имел дело с гипотетическим объектом – не содержащей абелевых идеалов лиевой алгеброй над полем $\mathbb{Z}_p$, удовлетворяющей тождеству Энгеля E_{p-1}. Как потом выясняется, такие алгебры не существуют. Читатель мог бы возразить, что о несуществующем объекте можно утверждать что угодно. Поэтому для убедительности мы решили написать полное доказательство, в котором все шаги подробно изложены в одном конструктивном стиле. Это оправдано и тем, что доказательство стало более прозрачным, чем в [25].

В [26] мы отметили, что не старались найти более точную оценку, и выразили надежду, что она будет кем-то улучшена. Для нас важно было установить принципиальную возможность прямого и эффективного доказательства результата Кострикина и показать, как это нужно делать.

Мой личный опыт обсуждения с Е. И. Зельмановым работ А. И. Кострикина по проблеме Магнуса–Бернсайда в 1983 г. на Международном конгрессе математиков в Варшаве и на Алгебраической конференции в Минске создавал впечатление, что по вопросу о перспективах нахождения конструктивного доказательства теоремы Кострикина у них до 1987 г. позиции были близкими.

Через три года после публикации нашей статьи [26] вышел английский перевод книги Кострикина, который отличается от русского оригинала. Как видно из рецензии [101] (см. с. 158), при переводе в книгу "были внесены некоторые исправления и добавления, дающие более четкую и доступную оценку идей", содержавшихся в русском издании книги. В частности, в добавлении к переводу оригинала книги приводится написанное Зельмановым конспективное изложение нашего с Разборовым результата, с такой же оценкой и с заменой доказательства большинства квазитождеств ссылками на их аналоги из этой книги.

В 1990 г. была опубликована и книга [102], в которой также было приведено доказательство нашего результата с примерно такой же, как у нас, верхней оценкой. Но странным образом автор этой книги даже не упоминает нашу статью [26], которая была опубликована в журнале "Успехи математических наук" за три года до его книги.

Вскоре Зельманову удалось доказать существенно более сильные результаты по проблеме Бернсайда–Магнуса. В 1990 г. в работе [103] он доказал существование максимальной конечной группы $R(m, n)$ для любой степени нечетного простого числа $n = p^k$, а через год в работе [104] – для периодов вида 2^k. Отсюда на основании известного результата В. Фейта и Дж. Томпсона о разрешимости конечных простых групп нечетного порядка [76] и теоремы 4.4.1 из совместной работы Ф. Холла и Г. Хигмана [96] следует положительное решение проблемы Бернсайда–Магнуса для любой нечетной экспоненты.

В 1993 г. М. Воэн-Ли и Е. Зельманов в статье [105] улучшили нашу оценку для порядков групп $R(m,n)$, которая была дана в работе [26].

Если пользоваться известной классификацией Гжегорчика для примитивно рекурсивных функций Gr^n, как это делают авторы статьи [105], можно сказать, что полученные нами в 1987 г. в [26] оценки порядков конечных m-порожденных групп простой экспоненты p лежат в классе Gr^5. В том же классе лежит оценка, опубликованная в 1990 г. в монографии [102]. Верхние оценки, полученные в совместной работе [105], сильнее, они лежат в предыдущем классе Gr^4.

Вопрос о том, можно ли улучшить асимптотическую нижнюю оценку для порядков групп $R(2,p)$, полученную в теореме 25, пока остается открытым.

Список литературы

[1] W. Burnside, “On an unsettled question in the theory of discontinuous groups”, *Quart. J. Pure Appl. Math.*, **33** (1902), 230–238.

[2] И. Н. Санов, “Решение проблемы Бернсайда для показателя 4”, *Ученые записки ЛГУ. Сер. матем.*, **10** (1940), 166–170.

[3] M. Hall Jr., “Solution of the Burnside problem for exponent six”, *Illinois J. Math.*, **2**:4 (1958), 764–786.

[4] W. Burnside, “On criteria for the finiteness of the order of a group of linear substitutions”, *Proc. London Math. Soc.*, **3** (1905), 435–440.

[5] I. Schur, “Über Gruppen periodisher linearer Substitutionen”, *Berl. Ber.*, 1911, 619–627.

[6] А. Г. Курош, “Проблемы теории колец, связанные с проблемой Бернсайда о периодических группах”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **5**:3 (1941), 233–240.

[7] M. F. Newman, “Bibliography”, *Burnside groups* (Proc. Workshop, Univ. Bielefeld, Bielefeld, 1977), Lecture Notes in Math., **806**, Springer, Berlin, 1980, 255–271, http://www.springerlink.com/content/978-3-540-10006-5/back-matter.pdf.

[8] П. С. Новиков, С. И. Адян, “О бесконечных периодических группах. I”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **32**:1 (1968), 212–244; англ. пер.: P. S. Novikov, S. I. Adjan, “Infinite periodic groups. I”, *Math. USSR Izv.*, **2**:1 (1968), 209–236; П. С. Новиков, С. И. Адян, “О бесконечных периодических группах. II”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **32**:2 (1968), 251–524; англ. пер.: P. S. Novikov, S. I. Adjan, “Infinite periodic groups. II”, *Math. USSR Izv.*, **2**:2 (1968), 241–479; П. С. Новиков, С. И. Адян, “О бесконечных периодических группах. III”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **32**:3 (1968), 709–731; англ. пер.: P. S. Novikov, S. I. Adjan, “Infinite periodic groups. III”, *Math. USSR Izv.*, **2**:3 (1968), 665–685.

[9] С. И. Адян, *Проблема Бернсайда и тождества в группах*, Наука, М., 1975, 335 с.; англ. пер.: S. I. Adian, *The Burnside problem and identities in groups*, Ergeb. Math. Grenzgeb., **95**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1979, ISBN: 3-540-08728-1, 311 pp.

[10] Б. Чандлер, В. Магнус, *Развитие комбинаторной теории групп. Очерк истории развития идей*, Мир, М., 1985, 255 с.; пер. с англ.: B. Chandler, W. Magnus, *The history of combinatorial group theory. A case study in the history of ideas*, Stud. Hist. Math. Phys. Sci., **9**, Springer-Verlag, New York, 1982, ISBN: 0-387-90749-1, 234 pp.

[11] W. Magnus, "A connection between the Baker–Hausdorff formula and a problem of Burnside", *Ann. of Math.* (2), **52**:1 (1950), 111–126.

[12] В. Магнус, А. Каррас, Д. Солитэр, *Комбинаторная теория групп*: *Представление групп в терминах образующих и соотношений*, Наука, М., 1974, 455 с.; пер. с англ.: W. Magnus, A. Karrass, D. Solitar, *Combinatorial group theory*: *Presentations of groups in terms of generators and relations*, Interscience, New York–London–Sydney, 1966, 444 pp.

[13] И. Н. Санов, "Установление связи между периодическими группами с периодом простым числом и кольцами Ли", *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **16**:1 (1952), 23–58.

[14] С. И. Адян, "Нормальные подгруппы свободных периодических групп", *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **45**:5 (1981), 931–947; англ. пер.: S. I. Adjan, "Normal subgroups of free periodic groups", *Math. USSR-Izv.*, **19**:2 (1982), 215–229.

[15] А. И. Кострикин, "Кольца Ли, удовлетворяющие условию Энгеля", *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **21**:4 (1957), 515–540; англ. пер.: A. I. Kostrikin, "Lie rings satisfying the Engel condition", *Amer. Math. Soc. Transl.* (2), **45** (1965), 191–220.

[16] А. И. Кострикин, "О проблеме Бернсайда", *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **23**:1 (1959), 3–34; англ. пер.: A. I. Kostrikin, "The Burnside problem", *Amer. Math. Soc. Transl.* (2), **36** (1964), 63–99.

[17] П. С. Новиков, "О периодических группах", *Докл. АН СССР*, **127**:4 (1959), 749–752; англ. пер.: P. S. Novikov, "On periodic groups", *Amer. Math. Soc. Transl.* (2), **45** (1965), 19–22.

[18] А. Г. Курош, *Теория групп*, 2-е изд., Гостехиздат, М., 1953, 467 с.; 3-е изд., Наука, М., 1967, 648 с.; англ. пер. 2-го изд.: A. G. Kurosh, *The theory of groups*, Chelsea Publishing, New York, 1960.

[19] Е. С. Голод, "О ниль-алгебрах и финитно-аппроксимируемых p-группах", *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **28**:2 (1964), 273–276.

[20] С. В. Алёшин, "Конечные автоматы и проблема Бернсайда о периодических группах", *Матем. заметки*, **11**:3 (1972), 319–328; англ. пер.: S. V. Aleshin, "Finite automata and the Burnside problem for periodic groups", *Math. Notes*, **11** (1972), 199–203.

[21] Р. И. Григорчук, "К проблеме Бернсайда о периодических группах", *Функц. анализ и его прил.*, **14**:1 (1980), 53–54; англ. пер.: R. I. Grigorchuk, "Burnside's problem on periodic groups", *Funct. Anal. Appl.*, **14**:1 (1980), 41–43.

[22] С. И. Адян, "Исследования по проблеме Бернсайда и связанным с ней вопросам", Тр. МИАН, **168**, Наука, М., 1984, 171–196; англ. пер.: S. A. Adyan, "Studies in the Burnside problem and related questions", *Proc. Steklov Inst. Math.*, **186** (1986), 179–205.

[23] А. И. Кострикин, "Сэндвичи в алгебрах Ли", *Матем. сб.*, **110**:1 (1979), 3–12; англ. пер.: A. I. Kostrikin, "Sandwiches in Lie algebras", *Math. USSR-Sb.*, **38**:1 (1981), 1–9.

[24] J. L. Britton, "The existence of infinite Burnside groups", *Word problems*: *decision problems and the Burnside problem in group theory* (Conf., Univ. California, Irvine, CA, 1969), Stud. Logic Found. Math., **71**, North-Holland, Amsterdam, 1973, 67–348.

[25] А. И. Кострикин, *Вокруг Бернсайда*, Наука, М., 1986, 232 с.; англ. пер.: A. I. Kostrikin, *Around Burnside*, Ergeb. Math. Grenzgeb. (3), **20**, Springer-Verlag, Berlin, 1990, ISBN: 3-540-50602-0, 220 pp.

[26] С. И. Адян, А. А. Разборов, "Периодические группы и алгебры Ли", *УМН*, **42**:2 (1987), 3–68; англ. пер.: S. I. Adian, A. A. Razborov, "Periodic groups and Lie algebras", *Russian Math. Surveys*, **42**:2 (1987), 1–81.

[27] С. И. Адян, "О некоторых группах без кручения", *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **35**:3 (1971), 459–468; англ. пер.: S. I. Adjan, "On some torsion-free groups", *Math. USSR-Izv.*, **5**:3 (1971), 475–484.

[28] С. И. Адян, “Периодические произведения групп”, Тр. МИАН, **142**, Наука, М., 1976, 3–21; англ. пер.: S. I. Adyan, “Periodic products of groups”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **142** (1979), 1–19.

[29] С. И. Адян, “О простоте периодических произведений групп”, *Докл. АН СССР*, **241**:1 (1978), 745–748; англ. пер.: S. I. Adjan, “The simplicity of periodic products of groups”, *Soviet Math. Dokl.*, **19**:4 (1978), 910–913.

[30] С. И. Адян, “Еще раз о периодических произведениях групп и проблеме А. И. Мальцева”, *Матем. заметки*, **88**:6 (2010), 803–809.

[31] В. Л. Ширванян, “Независимые системы определяющих соотношений свободной периодической группы нечетного показателя”, *Матем. сб.*, **100**:1 (1976), 132–136; англ. пер.: V. L. Širvanjan, “Independent systems of defining relations for a free periodic group of odd exponent”, *Math. USSR-Sb.*, **29**:1 (1976), 119–122.

[32] А. Ю. Ольшанский, “О теореме Новикова–Адяна”, *Матем. сб.*, **118**:2 (1982), 203–235; англ. пер.: A. Yu. Ol’shanskii, “On the Novikov–Adyan theorem”, *Math. USSR-Sb.*, **46**:2 (1983), 203–236.

[33] П. С. Новиков, С. И. Адян, “Определяющие соотношения и проблема тождества для свободных периодических групп нечетного порядка”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **32**:4 (1968), 971–979; англ. пер.: P. S. Novikov, S. I. Adjan, “Defining relations and the word problem for free periodic groups of odd order”, *Math. USSR-Izv.*, **2**:4 (1968), 935–942.

[34] П. С. Новиков, С. И. Адян, “О коммутативных подгруппах и проблеме сопряженности в свободных периодических группах нечетного порядка”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **32**:5 (1968), 1176–1190; англ. пер.: P. S. Novikov, S. I. Adjan, “On Abelian subgroups and the conjugacy problem in free periodic groups of odd order”, *Math. USSR-Izv.*, **2**:5 (1968), 1131–1144.

[35] С. И. Адян, “О подгруппах свободных периодических групп нечетного показателя”, Тр. МИАН, **112**, Наука, М., 1971, 64–72; англ. пер.: S. I. Adyan, “The subgroups of free periodic groups of odd exponent”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **112** (1971), 61–69.

[36] R. Baer, “Endlichkeitskriterien für Kommutatorgruppen”, *Math. Ann.*, **124**:1 (1952), 161–177.

[37] В. Л. Ширванян, “Вложение группы $\mathbf{B}(\infty,n)$ в группу $\mathbf{B}(2,n)$”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **40**:1 (1976), 190–208; англ. пер.: V. L. Širvanjan, “Embedding the group $\mathbf{B}(\infty,n)$ in the group $\mathbf{B}(2,n)$”, *Math. USSR-Izv.*, **124**:1 (1976), 161–177.

[38] Р. И. Григорчук, “Степени роста конечно-порожденных групп и теория инвариантных средних”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **48**:5 (1984), 939–985; англ. пер.: R. I. Grigorchuk, “Degrees of growth of finitely generated groups, and the theory of invariant means”, *Math. USSR-Izv.*, **25**:2 (1985), 259–300.

[39] С. И. Адян, “Случайные блуждания на свободных периодических группах”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **46**:6 (1982), 1139–1149; англ. пер.: S. I. Adyan, “Random walks on free periodic groups”, *Math. USSR-Izv.*, **21**:3 (1983), 425–434.

[40] С. И. Адян, “Аксиоматический метод построения групп с заданными свойствами”, *УМН*, **32**:1 (1977), 3–15; англ. пер.: S. I. Adyan, “An axiomatic method of constructing groups with given properties”, *Russian Math. Surveys*, **32**:1 (1977), 1–14.

[41] H. Kesten, “Symmetric random walks on groups”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **92**:2 (1959), 336–354.

[42] A. Yu. Olshanskii, M. V. Sapir, “Non-amenable finitely presented torsion-by-cyclic groups”, *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, **96** (2003), 43–169, http://www.numdam.org/item?id=PMIHES_2003__96__43_0.

[43] N. Monod, N. Ozawa, “The Dixmier problem, lamplighters and Burnside groups”, *J. Funct. Anal.*, **258**:1 (2010), 255–259.

[44] S. I. Adian, "On the word problem for groups defined by periodic relations", *Burnside groups* (Proc. Workshop, Univ. Bielefeld, 1977), Lecture Notes in Math., **806**, Springer, Berlin, 1980, 41–46.

[45] С. И. Адян, "Группы с периодическими определяющими соотношениями", *Матем. заметки*, **83**:3 (2008), 323–332; англ. пер.: S. I. Adyan, "Groups with periodic defining relations", *Math. Notes*, **83**:3 (2008), 293–300.

[46] И. Г. Лысёнок, "О некоторых алгоритмических свойствах гиперболических групп", *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **53**:4 (1989), 814–832; англ. пер.: I. G. Lysënok, "On some algorithmic properties of hyperbolic groups", *Math. USSR-Izv.*, **35**:1 (1990), 145–163.

[47] S. I. Adyan, I. G. Lysionok, "The method of classification of periodic words and the Burnside problem", *Proceedings of the International Conference on Algebra*, v. 1, Contemp. Math., **131**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992, 13–28.

[48] С. И. Адян, "Бесконечные неприводимые системы групповых тождеств", *Докл. АН СССР*, **190**:3 (1970), 499–501; англ. пер.: S. I. Adjan, "Infinite irreducible systems of group identities", *Soviet Math. Dokl.*, **11** (1970), 113–115.

[49] С. И. Адян, "Бесконечные неприводимые системы групповых тождеств", *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **34**:4 (1970), 719–734; англ. пер.: S. I. Adjan, "Infinite irreducible systems of group identities", *Math. USSR-Izv.*, **4**:4 (1970), 721–739.

[50] А. Ю. Ольшанский, "О проблеме конечного базиса тождеств в группах", *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **34**:2 (1970), 376–384; англ. пер.: A. J. Ol'šanskii, "On the problem of a finite basis of identities in groups", *Math. USSR-Izv.*, **4**:2 (1970), 381–389.

[51] Ю. Г. Клейман, "О базисе произведения многообразий групп", *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **37**:1 (1973), 95–97; англ. пер.: Ju. G. Kleiman, "On a basis of the product of varieties of groups", *Math. USSR-Izv.*, **7**:1 (1973), 91–94.

[52] Х. Нейман, *Многообразия групп*, Мир, М., 1969, 264 с.; пер. с англ.: H. Neumann, *Varieties of groups*, Springer-Verlag, New York, 1967, 192 pp.

[53] S. I. Adian, "Classifications of periodic words and their application in group theory", *Burnside groups* (Proc. Workshop, Univ. Bielefeld, 1977), Lecture Notes in Math., **806**, Springer, Berlin, 1980, 1–40.

[54] G. A. Jones, "Varieties and simple groups", *J. Austral. Math. Soc.*, **17**:2 (1974), 163–173.

[55] S. V. Ivanov, "On periodic products of groups", *Internat. J. Algebra Comput.*, **5**:1 (1995), 7–17.

[56] А. Ю. Ольшанский, "Проблема А. И. Мальцева об операциях над группами", *Тр. сем. им. И. Г. Петровского*, **14** (1989), 225–249; англ. пер.: A. Yu. Ol'shanskii, "A. I. Mal'tsev's problem on operations over groups", *J. Soviet Math.*, **51**:4 (1990), 2468–2486.

[57] С. И. Адян, В. П. Леденев, В. М. Тихомиров, "Юрий Ильич Хмелевский (к шестидесятилетию со дня рождения)", *УМН*, **52**:4 (1997), 243–246; англ. пер.: S. I. Adyan, A. A. Fridman, V. P. Ledenëv, V. M Tikhomirov, "Yuri Il'ich Khmelevskii (on the sixtieth anniversary of his birth)", *Russian Math. Surveys*, **52**:4 (1997), 875–880.

[58] Ю. И. Хмелевский, "К десятой проблеме Гильберта", *Проблемы Гильберта*, ред. П. С. Александров, Наука, М., 1969, 141–153, http://math.ru/lib/377.

[59] Р. Линдон, П. Шупп, *Комбинаторная теория групп*, Мир, М., 1980, 447 с.; пер. с англ.: R. C. Lindon, P. E. Shupp, *Combinatorial group theory*, Ergeb. Math. Grenzgeb., **89**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1977, ISBN: 3-540-07642-5, 339 pp.

[60] А. Ю. Ольшанский, "Бесконечная простая нётерова группа без кручения", *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **43**:6 (1979), 1328–1393; англ. пер.: A. J. Ol'šanskii, "An

infinite simple Noetherian group without torsion", *Math. USSR-Izv.*, **15**:3 (1980), 531–588.

[61] E. Rips, "Generalized small cancellation theory and its application I: The word problem", *Israel J. Math.*, **41**:1–2 (1982), 1–146.

[62] А. Ю. Ольшанский, "Группы ограниченного периода с подгруппами простых порядков", *Алгебра и логика*, **21**:5 (1982), 553–618; англ. пер.: A. Yu. Ol'shanskii, "Groups of bounded period with subgroups of prime order", *Algebra Logic*, **21**:5 (369–418), 1982.

[63] А. Ю. Ольшанский, "Бесконечная группа с подгруппами простых порядков", *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **44**:2 (1980), 309–321; англ. пер.: A. J. Ol'šanskii, "An infinite group with subgroups of prime orders", *Math. USSR-Izv.*, **16**:2 (1981), 279–289.

[64] А. Ю. Ольшанский, *Геометрия определяющих соотношений в группах*, Современная алгебра, Наука, М., 1989, ISBN: 5-02-013916-5, 448 с.; англ. пер.: A. Yu. Ol'shanskii, *Geometry of defining relations in groups*, Math. Appl. (Soviet Ser.), **70**, Kluwer, Dordrecht, 1991, ISBN: 0-7923-1394-1, 505 pp.

[65] В. С. Атабекян, С. В. Иванов, *Два замечания о группах ограниченного периода*, Деп. ВИНИТИ 2243-В87.

[66] С. И. Адян, И. Г. Лысёнок, "О группах, все собственные подгруппы которых конечные циклические", *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **55**:5 (1991), 933–990; англ. пер.: S. I. Adyan, I. G. Lysënok, "On groups all of whose proper subgroups are finite cyclic", *Math. USSR-Izv.*, **39**:2 (1992), 905–957.

[67] В. С. Губа, "Конечно-порожденная полная группа", *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **50**:5 (1986), 883–924; англ. пер.: V. S. Guba, "A finitely generated complete group", *Math. USSR-Izv.*, **29**:2 (1987), 233–277.

[68] В. С. Губа, "Конечно-порожденная простая группа со свободными 2-порожденными подгруппами", *Сиб. матем. журн.*, **27**:5 (1986), 50–67; англ. пер.: V. S. Guba, "A finitely generated simple group with free 2-generated subgroups", *Siberian Math. J.*, **27**:5 (1986), 670–684.

[69] S. V. Ivanov, "The free Burnside groups of sufficiently large exponents", *Internat. J. Algebra Comput.*, **4**:1–2 (1994), 1–308.

[70] И. Г. Лысёнок, "Бесконечные бернсайдовы группы четного периода", *Изв. РАН. Сер. матем.*, **60**:3 (1996), 3–224; англ. пер.: I. G. Lysenok, "Infinite Burnside groups of even exponent", *Izv. Math.*, **60**:3 (1996), 453–654.

[71] S. V. Ivanov, "On the Burnside problem on periodic groups", *Bull. Amer. Math. Soc. (N. S.)*, **27**:2 (1992), 257–260; arXiv: math/9210221.

[72] И. Г. Лысёнок, "Бесконечность бернсайдовых групп периода $2k$ при $k \geqslant 13$", *УМН*, **47**:2 (1992), 201–202; I. G. Lysenok, "The infinitude of Burnside groups of period $2k$ for $k \geqslant 13$", *Russian Math. Surveys*, **47**:2 (1992), 229–230.

[73] И. Г. Лысёнок, "Бернсайдовы структуры конечных подгрупп", *Изв. РАН. Сер. матем.*, **71**:5 (2007), 81–110; англ. пер.: I. G. Lysenok, "Burnside structures of finite subgroups", *Izv. Math.*, **71**:5 (2007), 939–965.

[74] S. V. Ivanov, A. Yu. Olshanskii, "Some applications of graded diagrams in combinatorial group theory", *Groups–St. Andrews* 1989, v. 2, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **160**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1991, 258–308.

[75] "Петр Сергеевич Новиков (к семидесятилетию со дня рождения)", *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **35**:6 (1971), 1187–1188; англ. пер.: "Petr Sergeevič Novikov (On the seventieth anniversary of his birth)", *Math. USSR-Izv.*, **5**:6 (1971), 1193–1194.

[76] W. Feit, J. G. Thompson, "Solvability of groups of odd order", *Pacific J. Math.*, **13**:3 (1963), 775–787, http://projecteuclid.org/euclid.pjm/1103053943.

[77] А. Ю. Ольшанский, “Периодические фактор-группы гиперболических групп”, *Матем. сб.*, **182**:4 (1991), 543–567; англ. пер.: A. Yu. Ol'shanskii, “Periodic factor groups of hyperbolic groups”, *Math. USSR-Sb.*, **72**:2 (1992), 519–541.

[78] S. V. Ivanov, A. Yu. Olshanskii, “Hyperbolic groups and their quotients of bounded exponents”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **348**:6 (1996), 2091–2138.

[79] S. V. Ivanov, A. Yu. Olshanskii, “On finite and locally finite subgroups of free Burnside groups of large even exponents”, *J. Algebra*, **195**:1 (1997), 241–284.

[80] В. С. Атабекян, “О периодических группах нечетного периода $n \geqslant 1003$”, *Матем. заметки*, **82**:4 (2007), 495–500; англ. пер.: V. S. Atabekyan, “On periodic groups of odd period $n \geqslant 1003$”, *Math. Notes*, **82**:3–4 (2007), 443–447.

[81] V. N. Obraztsov, “On a problem of P. Hall about groups isomorphic to all their non-trivial normal subgroups”, *Proc. London Math. Soc.* (3), **75**:1 (1997), 79–98.

[82] D. V. Osin, “Uniform non-amenability of free Burnside groups”, *Arch. Math.* (*Basel*), **88**:5 (2007), 403–412.

[83] В. С. Атабекян, “Равномерная неаменабельность подгрупп свободных бернсайдовых групп нечетного периода”, *Матем. заметки*, **85**:4 (2009), 516–523; англ. пер.: V. S. Atabekyan, “Uniform nonamenability of subgroups of free Burnside groups of odd period”, *Math. Notes*, **85**:3–4 (2009), 496–502.

[84] В. Д. Мазуров, Ю. И. Мерзляков, В. А. Чиркин, *Коуровская тетрадь. Нерешенные вопросы теории групп*, изд. 7, Изд-во Ин-та матем. СО АН СССР, Новосибирск, 1980, 144 с.

[85] A. Yu. Ol'shanskii, “Self-normalization of free subgroups in the free Burnside groups”, *Groups*, *rings*, *Lie and Hopf algebras* (St. John's, NF, 2001), Math. Appl., **555**, Kluwer, Dordrecht, 2003, 179–187.

[86] В. С. Атабекян, “Нормализаторы свободных подгрупп свободных бернсайдовых групп нечётного периода $n \geqslant 1003$”, *Фундам. и прикл. матем.*, **15**:1 (2009), 3–21.

[87] В. С. Атабекян, “О подгруппах свободных бернсайдовых групп нечетного периода $n \geqslant 1003$”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **73**:5 (2009), 3–36; англ. пер.: V. S. Atabekian, “On subgroups of free Burnside groups of odd exponent $n \geqslant 1003$”, *Izv. Math.*, **73**:5 (2009), 861–892.

[88] В. С. Атабекян, “О мономорфизмах свободных бернсайдовых групп”, *Матем. заметки*, **86**:4 (2009), 483–490; англ. пер.: V. S. Atabekyan, “Monomorphisms of free Burnside groups”, *Math. Notes*, **86**:3–4 (2009), 457–462.

[89] E. A. Cherepanov, “Normal automorphisms of free Burnside groups of large odd exponents”, *Internat. J. Algebra Comput.*, **16**:5 (2006), 839–847.

[90] В. С. Атабекян, “Нормальные автоморфизмы свободных бернсайдовых групп”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2011 (в печати).

[91] W. Magnus, “Beziehungen zwischen Gruppen und Idealen in einem speziellen Ring”, *Math. Ann.*, **111**:1 (1935), 259–280.

[92] W. Magnus, “Über Gruppen und zugeordnete Liesche Ringe”, *J. Reine Angew. Math.*, **182** (1940), 142–149.

[93] O. Grün, “Zusammenhang zwischen Potenzbildung und Kommutatorbildung”, *J. Reine Angew. Math.*, **182** (1940), 150–155.

[94] H. Zassenhaus, “Über Lie'sche Ringe mit Primzahlcharakteristik”, *Abh. Math. Sem. Hans. Univ. Hamburg*, **13**:1 (1939), 1–100.

[95] M. Vaughan-Lee, E. I. Zel'manov, “Bounds in the restricted Burnside problem”, *J. Austral. Math. Soc. Ser. A*, **67** (1999), 261–271.

[96] P. Hall, G. Higman, “On the p-length of p-soluble groups and reduction theorems for Burnside's problem”, *Proc. London Math. Soc.* (3), **6**:3 (1956), 1–42.

[97] С. И. Адян, Н. Н. Репин, “Экспоненциальная нижняя оценка ступени нильпотентности энгелевых алгебр Ли”, *Матем. заметки*, **39**:3 (1986), 444–452; англ. пер.:

S. I. Adyan, N. N. Repin, “An exponential lower bound on the step of nilpotency of Engel Lie algebras”, *Math. Notes*, **39**:3–4 (1986), 244–249.

[98] С. И. Адян, Н. Н. Репин, “Нижние оценки порядка максимальных периодических групп простого периода”, *Матем. заметки*, **44**:2 (1988), 161–176; англ. пер.: S. I. Adyan, N. N. Repin, “Lower estimates of the order of maximal periodic groups of prime period”, *Math. Notes*, **44**:2 (1988), 571–579.

[99] P. Hall, “A contribution to the theory of groups of prime-power exponent order”, *Proc. London Math. Soc.*, **36** (1934), 29–95.

[100] М. Холл, *Теория групп*, ИЛ, М., 1962, 468 с.; пер. с англ.: M. Hall Jr., Macmillan, New York, 1959, 434 pp.

[101] M. F. Newman, G. E. Wall, “Book Review: Around Burnside. Book Review: The restricted Burnside problem”, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, **28**:1 (1993), 157–161.

[102] M. Vaughan-Lee, *The restricted Burnside problem*, London Math. Soc. Monogr. (N.S.), **5**, The Clarendon Press, Oxford Univ. Press, New York, 1990, ISBN: 0-19-853573-2, 209 pp.

[103] Е. И. Зельманов, “Решение ослабленной проблемы Бернсайда для групп нечетного показателя”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **54**:1 (1990), 42–59; англ. пер.: E. I. Zel’manov, “Solution of the restricted Burnside problem for groups of odd exponent”, *Math. USSR-Izv.*, **36**:1 (1991), 41–60.

[104] Е. И. Зельманов, “Решение ослабленной проблемы Бернсайда для 2-групп”, *Матем. сб.*, **182**:4 (1991), 568–592; англ. пер.: E. I. Zel’manov, “A solution of the restricted Burnside problem for 2-groups”, *Math. USSR-Sb.*, **72**:2 (1992), 543–565.

[105] M. Vaughan-Lee, E. I. Zel’manov, “Upper bounds in the restricted Burnside problem”, *J. Algebra*, **162**:1 (1993), 107–145.

С. И. Адян (S. I. Adian)
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: sia@mi.ras.ru

Поступила в редакцию
02.08.2010