Булава

В предлагаемой вашему вниманию статье идет речь о движении тел в воздухе со скоростью, значительно превышающей скорость звука в воздухе. Такими телами являются, например, снаряды, вылетающие из ствола дальнобойного орудия, метеориты, а также падающие искусственные спутники Земли. Оцениваются силы сопротивления, которые возникают при таком движении.

> **Гипербола –** ***это не только*** **геометрическая форма, задаваемая определенным соотношением между координатами,** ***но и*** **литературный приём, позволяющий передать эмоциональное отношение говорящего (пишущего) к тому, о чём он рассказывает.**

Забавно, согласитесь, в разговоре школьников звучит фраза: «Сто лет не виделись!». Классические примеры гипербол:
У Гоголя «…редкая птица долетит до середины Днепра.»
Один из литературных героев О'Генри, пребывая в плохом настроении, так пнул ногой поросёнка, что тот полетел, опережая звук собственного визга.
В одной из русских сказок могучий богатырь бросил вверх булаву, которая вернулась на место только через 40 дней!
Последняя гипербола послужила основой для задачи, предлагавшейся на одном из Турниров Юных Физиков. В этой задаче нужно было оценить параметры знаменитого броска и подобрать материалы для изготовления подходящей булавы.

Рисунок В.Г. Бабаева

40 дней – это больше, чем лунный месяц, следовательно, сказочная булава вылетела за пределы земной атмосферы со скоростью чуть меньшей, чем вторая космическая, и за время полёта удалялась от Земли на расстояние большее, чем расстояние от Луны до Земли.
Космическая фаза полёта булавы – это самая простая часть задачи и не самая интересная. А вот разгон булавы от нулевой скорости и полёт в атмосфере представляют интерес и достойны детального рассмотрения.
Современные ракеты в начальной фазе полёта в плотной атмосфере движутся медленно. Поднимаясь всё выше и выше, они постепенно увеличивают скорость, и приобретают максимальную скорость уже на таких высотах, где влиянием остатков атмосферы на их движение можно пренебречь.
В отличие от ракет, сказочная булава не имела реактивного двигателя. Разгон булавы происходил от нулевой до максимальной скорости на отрезке пути, длина которого сравнима с ростом богатыря, поэтому максимальную скорость булава имела в тот момент, когда богатырь выпустил её из рук, и это произошло не очень высоко над поверхностью земли. В дальнейшем её скорость на пути вверх только уменьшалась, но сохранила величину порядка 11 км/с на высоте 100 км (на этой высоте уже можно пренебречь сопротивлением остатков атмосферы).
Если бы не было сопротивления при движении в воздухе, то подъём на высоту 100 км соответствовал бы уменьшению скорости, которое легко оценить, считая, что на этом пути булава двигалась с постоянным ускорением:

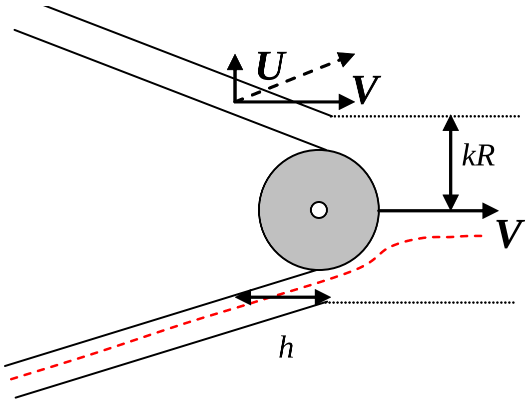
$$MgH + MV_h^2 \tfrac{1}{2} = MV_0^2 \tfrac{1}{2}$$

Из этого соотношения следует, что начальная скорость булавы должна была быть всего на 1% больше, чем скорость на высоте 100 км. То есть влиянием гравитации на пути булавы через атмосферу можно смело пренебречь. Можно сравнить рассматриваемую ситуацию с движением булавы с последствиями проезда автомобиля по пыльной дороге – за автомобилем в воздухе над дорогой остаётся след из облаков пыли, поперечный размер которых значительно больше размеров автомобиля. Пыль в данном случае позволяет увидеть движение воздуха за автомобилем.

Как движется воздух после пролёта булавы? Из какого материала была изготовлена булава, и каковы были её размеры, если она преодолела сопротивление толщи земной атмосферы только за счет начальной кинетической энергии, а разогнали её на пути длиной всего 2-3 метра?

На эти вопросы мы попытаемся ответить, решая предложенную задачу о булаве.
Скорость движения булавы относительно Земли была значительно больше скорости звука в воздухе, поэтому сопротивление среды могло быть весьма значительным.
Предположим, что булава имела форму шара с радиусом R и массой M и она во время полёта в атмосфере не меняла этих характеристик. Если булава за короткий промежуток времени Δt прошла в воздухе путь $b = V\Delta t$, то вместе с ней в движение пришел воздух, который до пролета булавы находился в объёме примерно равном $\pi R^2 b \times k^2$. Здесь k – это коэффициент, показывающий, во сколько раз радиус цилиндра, в объёме которого находился ранее покоившийся

воздух, отличается от радиуса шара ([1]). Для оценки примем этот коэффициент просто равным единице.
Воздух, пришедший в движение после пролёта булавы, не только нагрелся, и приобрел кинетическую нетепловую энергию, но и получил импульс, направленный в сторону движения булавы. При этом перед булавой уплотненный и разогревшийся воздух движется вместе с ней, и за счёт выросшего давления воздуха «разбрасывается» в стороны от булавы. Кроме составляющей скорости вдоль направления движения булавы (примерно равной её скорости V) у пришедшего в движение воздуха имеется составляющая скорости U в поперечном направлении. Приобретённая веществом скорость $(V^2+U^2)^{0,5}$ во много раз превосходит по величине среднюю величину скоростей теплового движения молекул в невозмущенном воздухе и, соответственно, скорость звука в воздухе. Поэтому в воздухе вокруг булавы формируется ударная волна.
«Перед» булавой давление сжатого воздуха значительно больше давления невозмущенного воздуха, а «за» ней давление значительно меньше давления окружающего воздуха. Можно считать, что на обращённую назад сторону булавы вообще не оказывается никакого давления.



Сжатие воздуха при набегании на него булавы происходит адиабатически, так как за короткое время её пролёта теплообмен воздуха с окружением не успевает изменить увеличившуюся тепловую энергию сжатого воздуха.
Если рассматривать движение воздуха из системы отсчета, связанной с булавой, то давление сжатого воздуха вблизи поверхности булавы в середине набегающего на булаву потока равно динамическому давлению потока воздуха $\rho_0 V^2$. (Здесь ρ_0 – это плотность воздуха до пролета булавы.) Это давление сдерживается давлением уплотнённого и разогревшегося воздуха $\rho_1 U^2$ вблизи поверхности булавы. При этом плотность внутренней энергии воздуха (двухатомного газа) равна примерно $2{,}5\rho_1 U^2$, и плотность энергии упорядоченного движения относительно булавы равна примерно $0{,}5\rho_1 U^2$. Кинетическая энергия набегающего потока воздуха $mV^2/2$ превращается в энергию упорядоченного и хаотического движения $(2{,}5+0{,}5)mU^2$, следовательно, $3mU^2 = mV^2/2$, или $6U^2=V^2$. Отсюда можно найти плотность воздуха вблизи поверхности булавы:

[1] Известно, что при турбулентном движении воздуха после пролёта шара и при скоростях движения шара в воздухе меньших скорости звука этот коэффициент меньше единицы (0,4 – 0,2) , однако при скоростях движения значительно больших скорости звука этот коэффициент становится больше единицы.

$$\rho_1 U^2 = \rho_0 V^2 \quad \rightarrow \quad \rho_1 = \rho_0 (V/U)^2 = 6\rho_0.$$

Теперь можно оценить и «ширину» h потока уплотнённого воздуха, уходящего в сторону от булавы, имеющей форму шара радиуса R:

$$\rho_1 2\pi R h U = \rho_0 \pi R^2 V \quad \rightarrow \quad h = 0{,}5R(6)^{-0,5} \approx R/5.$$

После пролёта булавы область разреженного воздуха за ней вновь заполняется воздухом, но непосредственно за булавой движется вместе с ней область разрежения с характерным размером вдоль направления движения булавы порядка: $H = R(6)^{0,5} \approx 2{,}5R$.

Воздух (или то, во что он превратился после сжатия) имеет плотность большую, чем плотность невозмущенного воздуха. Скорость булавы относительно воздуха даже на выходе за пределы атмосферы больше 10км/с, следовательно, характерные скорости теплового движения частиц в сжатом воздухе $U = V/(6)^{0,5} \approx 4$ км/с и скорость упорядоченного движения относительно невозмущенного воздуха $(U^2 + V^2)^{0.5}$ имеют такой же порядок величины. Таким скоростям движения молекул кислорода или азота (а на начальном этапе движения булавы и ещё большим скоростям) соответствует кинетическая энергия > 10 эВ. То есть воздух не только разогреется до температуры порядка 10^4К – 10^5К, но и значительная часть молекул, составляющих воздух, будет ионизована. Сжатый и разогретый газ светится (теряет энергию посредством механизма теплового излучения) во всех диапазонах длин волн, в том числе и в видимом диапазоне, поэтому полёт булавы в воздухе будет хорошо виден издалека не только ночью, но и, по-видимому, днём.

Вблизи летящей булавы фронт ударной волны составляет с направлением скорости $\boldsymbol{V}$ угол $[\pi - \mathrm{arctg}(6^{-0,5})] \approx 160^{\circ}$. Удаляясь от булавы, ударная волна быстро распределяет свою энергию по пространству, перестаёт быть ударной волной, и распространяется в дальнейшем в виде конуса Маха с образующим конус углом $\beta = \arcsin(c/V)$. В этой формуле c – это скорость звука в воздухе. И, в конце концов, вся полученная воздухом механическая и тепловая энергия переходит в энергию хаотического движения молекул воздуха (в тепловую энергию).

Однако мы отвлеклись: исследование ударных волн представляет собой отдельную интересную задачу, а нам нужно *оценить* торможение булавы!

Рассмотрим упрощенную механическую модель движения плотного предмета в воздушной среде. Оценим потери кинетической энергии булавы и также изменение импульса булавы связанные с её прохождением через воздушную атмосферу Земли.

Итак, масса воздуха $\rho\pi R^2 V\Delta t$ нагрелась и пришла в движение со скоростью равной по величине примерно $(U^2 + V^2)^{1/2}$.

В соответствии с законом сохранения импульса:

$$M\Delta V = -\rho\pi R^2 V \Delta t V.$$

В соответствии с законом сохранения энергии:

$$MV\Delta V = -\rho\pi R^2 V \Delta t \left(\frac{V^2 + U^2}{2}\right) + Q =$$

$$= -\rho\pi R^2 V \Delta t \left(\frac{7V^2}{12} + \frac{5V^2}{12}\right) = -\rho\pi R^2 V \Delta t V^2.$$

Здесь Q – это тепловая энергия, приобретенная сжатой и разогретой порцией воздуха, а также энергия излучения разогретого воздуха. При температурах 10^4К – 10^5К в излучение превращается небольшая часть энергии, и можно пренебречь вкладом излучения в теплоёмкость. Как видно, второе из уравнений получается умножением на V первого уравнения. Решением этого уравнения является функция:

$$V = V_0 e^{-\frac{m}{M}}$$

Конечная скорость булавы на выходе из атмосферы зависит от массы m – это масса воздуха, «заметаемая» поперечным сечением шара. Эта масса может быть легко оценена, если считать, что булава после броска полетела вертикально: $m \approx \pi R^2 \frac{P_{атмосф}}{g}$.

$$V_{2косм} = V_0 e^{-\frac{\pi R^2 P_{атм}}{Mg}}; \qquad \Rightarrow \qquad V_0 = V_{2косм} e^{+\frac{\pi R^2 P_{атм}}{Mg}}$$

Полученная формула позволяет оценить начальную скорость булавы в зависимости от её радиуса и массы.

$$V_0 = V_{2косм} e^{+\frac{3P_{атм}}{4\rho Rg}} = \sqrt{2gR_{Земли}} \times 10^{+\frac{0,326 P_{атм}}{\rho Rg}}$$

Из приведенной формулы видно, что чем больше радиус булавы, тем меньше может быть её начальная скорость. (С другой стороны булава – это оружие и для богатыря масса булавы не должна быть маленькой.) Предположим, что булава сделана из обедненного урана и покрыта прочной термостойкой оболочкой. Уран обладает весьма высокой плотностью: $\rho = 19040 \frac{кг}{м^3}$.

Начальная кинетическая энергия W булавы будет равна:

$$W = \frac{2\pi\rho R^3}{3} V_0^2 = \frac{4\pi\rho g R_{Земли}}{3} R^3 \times e^{+\frac{3P_{атм}}{2\rho Rg}}.$$

Минимальная начальная кинетическая энергия булавы соответствует радиусу шара (булавы) равному:

$$R = \frac{P_{атм}}{2\rho g} \approx 0,263 м.$$

При этом булава имеет массу M = 1450 кг, и её начальная скорость равна V_0=49,3 км/с. Это многовато не только для чемпионов мира по поднятию штанги или по броскам молота на дальность, но даже для любых химических источников энергии, выделяющейся во время взрыва.

Оценим теперь силу F, с которой богатырь разгонял булаву, и давление, которое оказывалось на материал булавы.

Пусть рост богатыря 2 метра, это значит, что разгонный путь булавы L не превышает 3 метров.

$$FL = M\frac{V^2}{2} \qquad \Rightarrow \qquad F \approx 0,59 \times 10^{12} H$$

Если распределить такую силу по площади поперечного сечения шара (πR^2), то получится давление $P \approx 2,7 \times 10^{12}\,Па$. Это давление примерно в 10^3 раз больше, чем давление, создаваемое при взрыве тротила, и примерно в 10^5 раз меньше, чем давление, создающееся в центре ядерной бомбы при взрыве. Кроме того, это давление значительно больше предела прочности урана $\sigma \approx 3 \times 10^8\,(Па)$. Так что, скорее всего, урановая булава во время броска просто просочилась бы между пальцами богатыря, а сам богатырь, на какой бы прочной скале он ни стоял, провалился бы под землю.

Наблюдательные читатели (большинство из них) не раз видели, как в ночном небе пролетают и сгорают в атмосфере метеориты. Скорости относительно воздуха у метеоритов – пришельцев из космоса – составляют десятки километров в секунду. Если падающее из Космоса тело принадлежало нашей солнечной системе, то его максимальная скорость относительно Земли составляет примерно $30\times(1+2^{1/2})$ км/с $\approx$ 72 км/с. Полученные формулы для булавы позволяют рассчитать судьбу метеорита, попавшего в атмосферу Земли в зависимости от его размеров и массы. В частности, если урановый метеорит в форме шара радиуса 0,263 м падает вертикально и входит в атмосферу со скоростью 49,3 км/с, то непосредственно перед ударом о поверхность Земли он будет иметь скорость около 11 км/с. Как видно, при падении такого метеорита большая часть его энергии достаётся воздуху атмосферы Земли.
Материал статьи позволяет читателям самостоятельно проводить вычисления и узнавать судьбу различных тел, попадающих в атмосферу Земли. Примерные задачи на эту тему могут иметь формулировки:
1. Оцените размеры железного метеорита, который, прорвавшись сквозь атмосферу Земли, донесет до её твёрдой поверхности больше 90% своей энергии.
2. Оцените минимальные размеры железного метеорита, который пролетит сквозь атмосферу, коснётся твёрдой поверхности Земли и улетит обратно в Космос.

С. Варламов
5 февраля 2008 г.