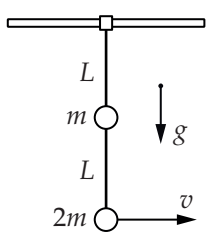


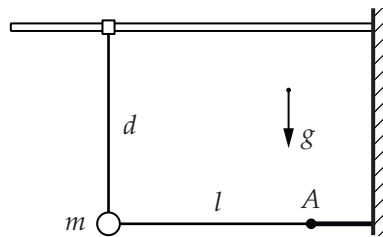
8. Динамика систем со связями

Указание. В некоторых задачах, приведённых ниже, фигурируют невесомые тела. Сумма сил, действующих на такое тело, равна нулю, кроме того равна нулю сумма моментов сил в любой системе отсчёта. Этот факт везде можно использовать без доказательства.

1. Очень лёгкое колечко может без трения скользить по горизонтальному стержню. К колечку с помощью двух невесомых нерастяжимых нитей длиной L присоединены два тела с массами m и $2m$ (см. рисунок). Какую минимальную горизонтальную скорость v нужно сообщить нижнему телу, чтобы в процессе последующего движения тела могли оказаться на одной высоте?



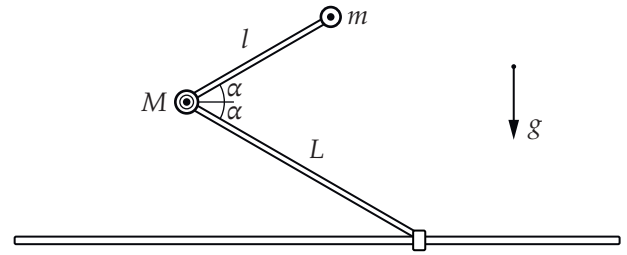
К задаче 1



К задаче 2

а на свободном конце нижнего — лёгкое колечко, которое может скользить по гладкой горизонтальной закреплённой тонкой спице. Длина верхнего стержня равна l , а длина нижнего — L ($L > l$). Изначально каждый стержень составляет угол α с горизонтом и удерживается неподвижно. Затем систему освобождают. Конструкция устроена таким образом, что все тела могут пролетать мимо друг друга, не соударяясь. Ускорение свободного падения равно g .

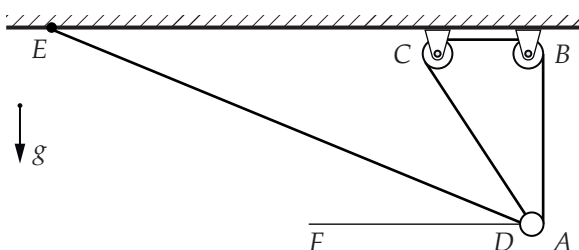
Найдите ускорения шарнира $a_{ш}$ и грузика a_T сразу после начала движения. Определите ускорение колечка a_k в тот момент времени, когда шарнир, груз и колечко окажутся на одной прямой.



К задаче 4

2. К одному концу невесомой и нерастяжимой нити прикреплено невесомое колечко, которое может без трения скользить по горизонтальному стержню. Второй конец нити закреплён в некоторой точке (точка A на рисунке) так, что стержень и нить лежат в одной плоскости. По нити может без трения скользить маленькая массивная бусинка. Вначале колечко и бусинку удерживают так, что участок нити от колечка до бусинки вертикален и его длина равна d , участок нити от бусинки до точки крепления второго конца нити горизонтален и его длина равна l . Затем колечко и бусинку отпускают. Определите скорость бусинки в момент, когда она окажется на одной вертикали с точкой A , найдите силу натяжения нити в этот момент времени. Масса бусинки равна m .

3. Нерастяжимая нить прикреплена к маленькой массивной бусинке в точке A , переброшена через блоки B и C , пропущена через сквозное отверстие D в той же бусинке, и прикреплена к потолку в точке E . Первоначально бусинку удерживают так, что участок нити AB вертикален, $\angle FDE = \alpha$ (FD — горизонтальная прямая), $\angle FDC = 3\alpha$. Бусинку аккуратно отпускают. Найдите ускорение бусинки сразу после этого. Трение между нитью и стенками отверстия в бусинке отсутствует.



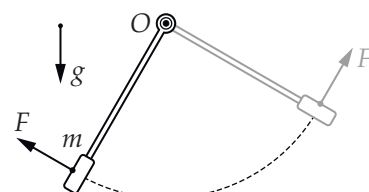
К задаче 3

4. В вертикальной плоскости находятся тонкие невесомые стержни, соединённые шарниром массой M . На свободном конце верхнего стержня закреплён груз массой m ,

5. На шероховатой наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом, лежит жёсткий невесомый стержень длиной L . Один конец стержня шарнирно прикреплен к плоскости, а ко второму концу присоединён небольшой массивный груз. Изначально стержень находится в положении равновесия, при котором груз находится в самой нижней точке. Какую минимальную скорость v_2 , направленную перпендикулярно стержню и вдоль плоскости, необходимо сообщить грузу, чтобы он смог вернуться в исходную точку после одного полного оборота стержня?

Коэффициент трения между грузом и наклонной плоскостью равен $\mu = \frac{\text{tg}\alpha}{2}$. Трением между стержнем и плоскостью, трением в шарнире и вязким трением о воздух можно пренебречь.

6. Небольшой груз массой m закреплён на конце невесомого стержня, который может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через точки O (см. рисунок). Вначале груз находится в положении равновесия под действием силы F , направленной перпендикулярно стержню. В некоторый момент направление силы F мгновенно меняется на противоположное. В дальнейшем величина этой силы остаётся постоянной, а направление меняется, так что в любой момент она оказывается направлена перпендикулярно стержню, вращая его против часовой стрелки.



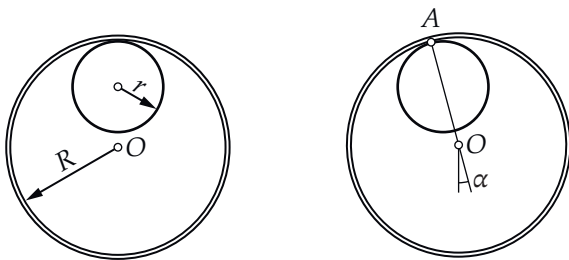
К задаче 6

При каких значениях силы F стержень до начала движения будет находиться в состоянии устойчивого

равновесия, а после начала движения сможет совершить полный оборот вокруг оси вращения?

7. На шероховатом столе стоит обруч радиусом R пренебрежимо малой массы. В самой верхней точке обруча закреплён точечный груз массой M . От незначительного толчка обруч начинает двигаться, так что все его точки перемещаются в плоскости обруча. Определите скорость центра обруча в момент окончания движения без проскальзывания, если коэффициент трения μ между столом и обручем равен 0,5. Ответьте на вопрос задачи в случае, если коэффициент трения μ равен 1,5 (адгезия).

8. Цилиндрическое бревно радиусом r , ось которого горизонтальна, неподвижно закреплено. На бревно надет тонкий однородный обруч массой m и радиусом R (см. рисунок слева). Обруч вывели из положения равновесия, отклонив его в плоскости рисунка так, что отрезок OA , соединяющий центр обруча и точку касания обруча и бревна, отклонился на угол α от вертикали (см. рисунок справа). Обруч отпустили. Найдите скорость нижней его точки при прохождении обручем положения равновесия, а также модуль силы, с которой обруч давит на бревно в этот момент. Обруч движется по бревну без проскальзывания.



К задаче 8

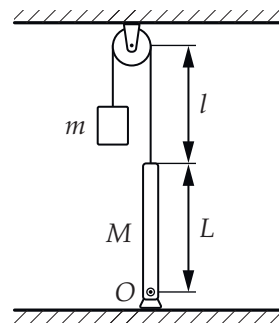
9. Элементы статики

9. Человек массой m_1 , оставаясь на месте на горизонтальном шероховатом полу, тянет за верёвку груз массой m_2 . Коэффициент трения между полом и подошвами ботинок человека, а также между грузом и полом равен $\mu = 0,5$. При какой наименьшей силе натяжения верёвки груз стронется с места? Какой угол α с горизонтом при этом будет составлять верёвка?

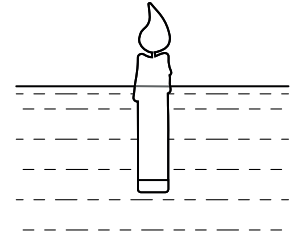
10. Некоторые виды лягушек обладают способностью ползать по стенам и потолку при помощи специальных присосок на лапках. Лягушка может создать под присоской зону пониженного давления, что обеспечивает силу «прилипания» F , перпендикулярную поверхности стены. Пусть такая лягушка массой $m = 5$ г может создать на всех лапках суммарную силу «прилипания» не больше F_0 . Чему должно быть равно значение F_0 , чтобы при любом угле наклона стенки лягушка могла бы располагаться на ней неподвижно, если коэффициент трения лап о стенку равен $\mu = 0,5$?

11. Один конец однородного стержня массой M и длиной L опирается на шарнир O (см. рисунок), а другой — прикреплен к лёгкой нити, перекинутой через блок. К свободному концу нити привязан груз массой m . Расстояние от стержня до блока равно l (размером блока можно

пренебречь). При какой массе груза вертикальное положение равновесия стержня будет устойчивым? Устойчивым в данном случае называется такое положение равновесия, что при отклонении стержня от него на малый угол возникает сила, возвращающая стержень в положение равновесия.



К задаче 11

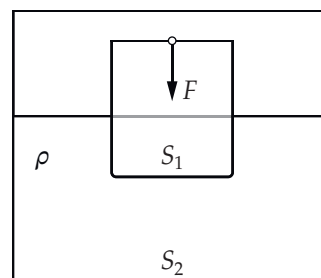


К задаче 12

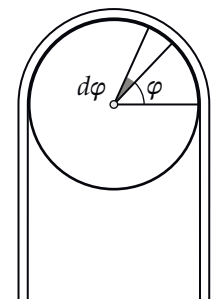
12. Экспериментатор Глюк пустил плавать по тихому озеру горящую свечу. Для того, чтобы улучшить её устойчивость в вертикальном положении равновесия, он прикрепил к нижнему концу свечи маленький груз (см. рисунок). Чему может быть равно время горения плавающей в воде свечи? Считайте, что свеча однородна, её плотность $\rho = 900$ кг/м³, а время полного сгорания на суше $t_0 = 20$ мин. Можно считать, что при горении вещество свечи превращается в газообразные оксиды без остатка. Плотность воды $\rho_0 = 1000$ кг/м³.

13. В цилиндрическом сосуде, площадь дна которого равна S_2 , плавает тонкостенный цилиндрический стакан высотой $h = 24$ см с площадью дна S_1 . Стакан начинают медленно погружать в воду, измеряя зависимость приложенной силы F от перемещения x стакана вниз относительно дна сосуда (см. рисунок). Оказалось, что значению силы $F_1 = 1,0$ Н соответствуют два значения x : $x_1^{(1)} = 1,5$ см и $x_1^{(2)} = 7,5$ см, а значению силы $F_2 = 2,0$ Н — значения x : $x_2^{(1)} = 3,0$ см и $x_2^{(2)} = 7,0$ см. Полагая, что плотность воды и ускорение свободного падения равны $\rho = 1,0$ г/см³ и $g = 10$ м/с², определите массу стакана, площадь его дна S_1 и площадь дна сосуда S_2 .

Объёмом стекла, из которого изготовлен стакан, можно пренебречь по сравнению с вместимостью стакана.



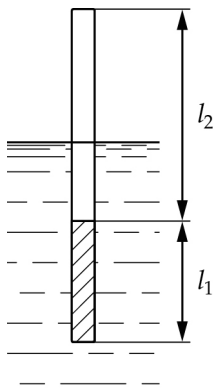
К задаче 13



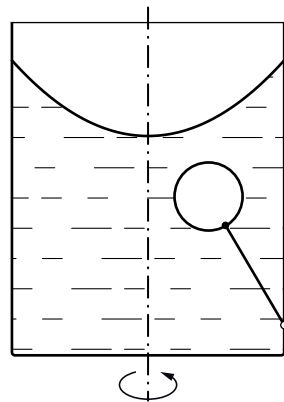
К задаче 14

14. На гладкой цилиндрической трубе радиуса R (см. рисунок) висит однородный гибкий канат массой m и длиной $L = 3\pi R$. Определите разность сил натяжения каната dT в точках, определяемых углами $\varphi + d\varphi$ и φ . Найдите максимальную силу натяжения каната T_{\max} .

15. Тонкий стержень постоянного сечения состоит из двух частей. Первая из них имеет длину $l_1 = 10$ см и плотность $\rho_1 = 1,5$ г/см³, вторая — плотность $\rho_2 = 0,5$ г/см³ (см. рисунок). При какой длине l_2 второй части стержня он будет плавать в воде (плотность $\rho_0 = 1$ г/см³) в вертикальном положении?



К задаче 15



К задаче 21

16. Однородная гибкая верёвка длины $L = 1$ м и массой $m = 320$ г подвешена к горизонтальному потолку так, что глубина провиса верёвки равна $h = 25$ см. Найдите минимальное и максимальное значения силы натяжения верёвки.

17. В горах проведена линия электропередач. Масса провода между двумя соседними опорами, расположенными на разной высоте, равна m , а его длина равна L . Провод между опорами провисает, при этом расстояние по вертикали между нижней точкой провода и точкой крепления его к верхней опоре равно H . Длина участка провода между этими двумя точками равна l . Найдите максимальную силу натяжения провода.

18. Однородный гибкий канат проходит через два небольших блока, установленных на потолке. Канат находится в равновесии при этом часть каната провисает между блоками. Длина провисшей части каната равна l , а глубина прогиба — h . Чему равна длина S частей каната, свисающих с обратных сторон блоков? Радиус блоков много меньше глубины прогиба и длины провисающей части каната. Трение в осях блоков пренебрежимо мало.

19. Лёгкая нерастяжимая верёвка опоясывает по полуокружности неподвижный цилиндр. Из-за трения верёвка не скользит по цилиндру, когда величины сил F_1 и F_2 , действующих на её концах, удовлетворяют неравенству

$$\frac{F_1}{k} \leq F_2 \leq F_1 \cdot k,$$

где $k > 1$ — известное число. Определите коэффициент трения между верёвкой и цилиндром.

20. Определите минимальную силу натяжения двух канатов, связывающих широкий плот, состоящий из двух слоёв брёвен. Масса каждого бревна равна m . Верхний слой брёвен погружен в воду наполовину.

21. Вертикальный цилиндрический сосуд радиуса R , частично заполненный жидкостью, вращается вместе с жидкостью вокруг своей оси. К боковой стенке сосуда на нити длины l привязан воздушный шарик радиуса r ; во время

вращения нить образует со стенкой угол α . Определите угловую скорость вращения сосуда.

Как изменится ответ, если сосуд изначально был заполнен жидкостью до самого верха, потом герметично закрыт крышкой и только после этого раскручен до угловой скорости ω ? Чему в этом случае равна сила давления жидкости на верхнее и нижнее основания сосуда (когда он вращается)?

22. Вертикально расположенный цилиндрический сосуд радиусом R полностью заполнен водой плотности ρ_0 и герметично закрыт жёсткой крышкой. На расстоянии $\frac{R}{2}$ от оси симметрии цилиндра расположены три маленьких одинаковых шарика радиусом r . Плотность материала шарика 1 равна $\rho_1 < \rho_0$, у шарика 2 $\rho_2 = \rho_0$, а у шарика 3 $\rho_3 > \rho_0$. Цилиндр медленно раскручивают до постоянной угловой скорости вращения ω . Где будут находиться шарики во вращающемся цилиндре и почему?

Определите результирующую силу давления со стороны воды на каждый шарик и направление этой силы в их новых положениях равновесия. Силой трения о дно и крышку цилиндра можно пренебречь.

23. Планета, состоящая из несжимаемой жидкости, вращается вокруг своей оси с угловой скоростью ω . Средний радиус планеты равен R , масса планеты M . Оцените несферичность δ планеты, обусловленную её вращением, считая δ малой величиной. Несферичностью мы называем величину

$$\delta = \frac{R_2 - R_1}{R_1},$$

где R_2 и R_1 — расстояния от центра планеты до экватора и до полюса соответственно.

24. В дне сосуда имеется сужающееся отверстие, плотно закрытое пробкой в форме конуса. Площадь основания пробки S , высота L . Уровень дна сосуда пересекает конус на половине его высоты. Плотности пробки и жидкости составляют ρ_0 и ρ соответственно. Какой должна быть высота уровня жидкости H над основанием конуса, чтобы пробка не всплывала?

Указание. Объём конуса высотой L с площадью основания S даётся формулой $V = \frac{LS}{3}$.

25. В дне сосуда сделано круглое отверстие, которое закрыто пробкой в виде шара. Радиус шара вдвое больше радиуса отверстия. В сосуд аккуратно наливают воду. При какой максимальной плотности пробка всплывёт? Плотность воды ρ известна.

Указание. Объём шарового сегмента определяется формулой

$$V = \frac{\pi}{3} \left(2R^3 - (2R^2 + r^2) \sqrt{R^2 - r^2} \right),$$

где R — радиус шара, r — радиус круга, являющегося основанием сегмента.