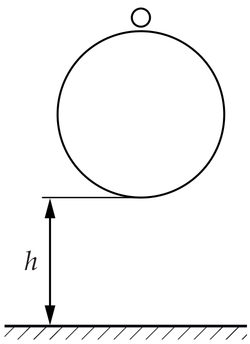
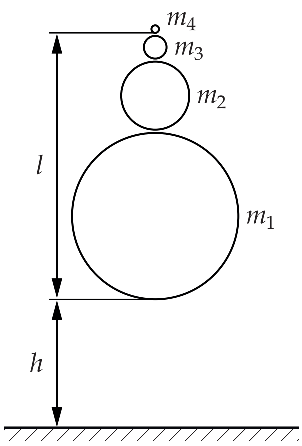
4. Столкновения

1. Шарики масс m_1 и m_2 движутся в неподвижной кольцевой трубке с начальными скоростями v_1 и v_2. Каковы будут их скорости после 2025-го и 2026-го столкновений? Удары абсолютно упругие, трубка гладкая.

2. Баскетбольный мяч диаметром d и маленький шарик, почти касающийся его верхней точки (между ними всё-таки остаётся микроскопический зазор), удерживаются в поле тяжести так, что расстояние от нижней точки мяча до твёрдой горизонтальной поверхности пола равно h (см. рисунок). Мяч и шарик одновременно отпускают. Какой максимальной высоты относительно пола теоретически может достичь шарик в процессе движения? Считайте, что масса мяча значительно превышает массу шарика.



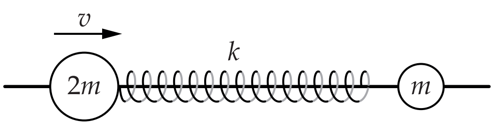
К задаче 2



К задаче 3

3. Рассмотрим n шаров с массами $m_1, m_2, \dots, m_n$, причём $m_1 \gg m_2 \gg \dots \gg m_n$. Шары расположены так, что их центры лежат на одной вертикали, а между соседними есть микроскопические зазоры. На рисунке показана конфигурация для $n = 4$. Нижний шар находится на высоте h над твёрдой горизонтальной поверхностью, а нижняя точка верхнего шара — на высоте $h + l$. Сначала шары удерживают, затем одновременно отпускают. Какой максимальной высоты над поверхностью может достичь верхний шар? Пусть $h = 1$ м. Сколько шаров потребуется, чтобы верхний шар поднялся на высоту 1 км? А чтобы он достиг первой космической скорости? Считайте, что величиной l можно пренебречь по сравнению с высотой, на которую поднимается верхний шар.

4. Шары насажены на прямолинейную горизонтальную спицу и могут скользить по ней без трения (см. рисунок).

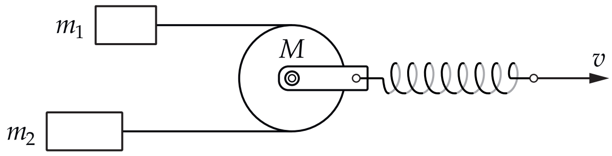


К задаче 4

К шару массой $2m$ прикреплена лёгкая пружина жёсткостью k. Изначально шар массой m покоится, а шар массой $2m$ движется со скоростью v. Радиусы шаров много меньше длины пружины. Определите скорость шара массой $2m$ в момент, когда абсолютное значение деформации пружины достигнет максимума. Чему станет равна скорость шара массой m после отрыва от пружины?

5. На прямолинейном горизонтальном участке железной дороги стоит вагонетка с ценным грузом. Ночью к ней подкрался похититель. В качестве вспомогательного средства он использовал невесомый упругий шнур: один конец привязал к вагонетке, другой взял в руки и побежал вдоль рельсов с постоянной скоростью v_0. Спустя некоторое время он очнулся на вагонетке, которая двигалась со скоростью $v_1 = 1{,}8 v_0$. Чему равна масса вагонетки с грузом, если масса похитителя $m = 80$ кг? Трением качения можно пренебречь, сцепление ботинок с землёй считать достаточно большим. Объясните, как похититель оказался на вагонетке.

6. На гладкой горизонтальной поверхности расположен тонкий однородный блок массой M, через который переброшена невесомая нерастяжимая нить. К её концам прикреплены небольшие бруски массами m_1 и m_2. К центру блока присоединён один из концов невесомой пружины. Изначально система покоится, пружина не деформирована, нить слегка натянута, а её прямолинейные участки параллельны друг другу и пружине. Второй конец пружины начинают перемещать с постоянной скоростью v, направленной от центра блока. Трения между нитью и блоком, а также в оси блока нет. Считайте, что бруски не сталкиваются с блоком.

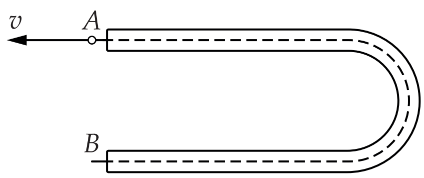


К задаче 6

а) Найдите скорости v_M, v_1 и v_2 блока, бруска массой m_1 и бруска массой m_2 соответственно в момент, когда удлинение пружины будет максимальным.

б) Найдите скорости v'_M, v'_1 и v'_2 блока, бруска массой m_1 и бруска массой m_2 соответственно в момент, когда пружина впервые вновь окажется недеформированной.

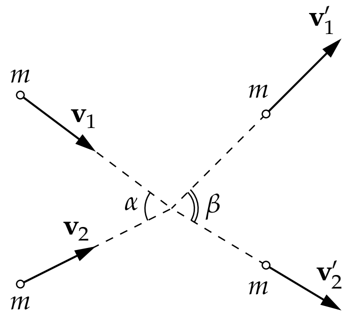
7. Внутри U-образной трубки массой M, лежащей на горизонтальном столе, находится нерастяжимая нить массой m (см. рисунок). В начальный момент в каждом колене трубки находится по половине нити, а сама трубка движется. Нить в трубке движется так, что скорость конца A нити в этот момент равна v, а скорость конца B равна нулю. С какой скоростью будет двигаться трубка, когда нить вылетит из неё? Всеми видами трения можно пренебречь. Радиус изгиба трубки можно считать малым.



К задаче 7

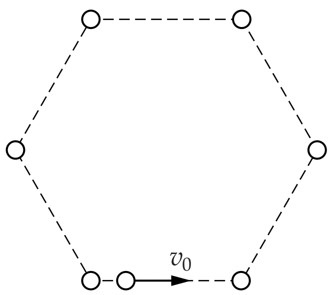
8. Небольшая шайба, движущаяся по гладкой горизонтальной поверхности, налетела на вторую шайбу, покоившуюся на той же поверхности. После абсолютно упругого удара скорости шайб v_1 и v_2 оказались направлены под углом φ друг к другу. Найдите скорость v_0 первой шайбы до удара. Массы шайб не заданы, но известно, что они различны.

9. Два одинаковых маленьких шарика упруго сталкиваются (см. рисунок). Известны модули их скоростей v_1 и v_2 до столкновения (причём $v_1 \neq v_2$), а также угол α между векторами скоростей $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$. Найдите максимально возможное значение $\beta_{\max}$ угла разлёта шариков.

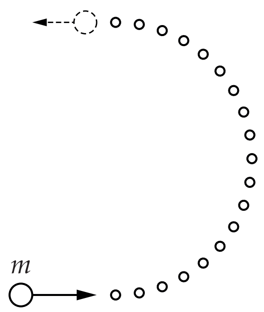


К задаче 9

10. Шесть одинаковых гладких маленьких шайб расположены на гладкой горизонтальной плоскости в вершинах правильного шестиугольника со стороной a. Седьмая точно такая же шайба находится посередине одной из сторон шестиугольника. Ей сообщают скорость v_0 в направлении одной из вершин (см. рисунок) так, что она последовательно сталкивается со всеми «вершинными» шайбами. Какую скорость будет иметь эта шайба после шестого столкновения? Через какое время после первого столкновения произойдёт шестое? Все столкновения считаются абсолютно упругими. Трение отсутствует.



К задаче 10



К задаче 11

11. N одинаковых маленьких шайбочек расположены на гладком горизонтальном столе на равных расстояниях друг от друга так, что их центры лежат на полуокружности. Суммарная масса этих шайб равна M. Ещё одна шайбочка массой m скользит в направлении, перпендикулярном диаметру этой полуокружности, и, сталкиваясь последовательно со всеми неподвижными шайбами, в итоге продолжает движение в направлении, противоположном исходному. Все столкновения считаются упругими, всеми видами трения можно пренебречь. В предельном случае при $N \to \infty$ чему должно быть равно минимальное значение отношения масс $\frac{M}{m}$, чтобы описанный сценарий мог реализоваться?

12. Атомы типа A летят вдоль оси цилиндрического канала радиусом R и сталкиваются с практически неподвижными атомами типа B, располагающимися на небольшом расстоянии (по сравнению с R) от оси канала. Кинетическая энергия атомов A равна пороговой, так что при центральном ударе образуется молекула AB, которая далее движется со скоростью v. При нецентральном ударе реакция не идёт, то есть столкновение атомов можно считать упругим. За какое минимальное время после столкновения атомы типа B смогут от оси цилиндра попасть на стенку канала?

13. Ядро массой $6m$, кинетическая энергия которого равна T, налетает на неподвижное ядро массой m. В результате столкновения, состояние налетающего ядра не изменяется, оно рассеивается на некоторый угол, а ядро массой m переходит в возбуждённое состояние и начинает двигаться. Величина энергии возбуждения равна $\frac{3T}{28}$. Найдите скорость ядра массой m после столкновения в системе центра масс ядер. Определите максимальное значение угла между вектором скорости лёгкого ядра после столкновения и вектором скорости тяжёлого ядра до столкновения.

5. Ответы

1. После 2025-го столкновения скорости шариков будут равны:

$$v_1^{(2025)} = \frac{|(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2v_2|}{m_1 + m_2},$$
$$v_2^{(2025)} = \frac{|2m_1v_1 - (m_1 - m_2)v_2|}{m_1 + m_2}.$$

После 2026-го столкновения: $v_1^{(2026)} = v_1$; $v_2^{(2026)} = v_2$.

2. $H = d + 9h$.

3. $H = l + (2^n - 1)^2 h$; $n = 6$ (пяти шаров мало); $n \geqslant \log_2\left(\sqrt{\frac{R}{2h}} + 1\right)$, где R — радиус Земли, $n \geqslant 11$.

4. $v_{2m} = \frac{2v}{3}$; $v_m = \frac{4v}{3}$.

5. $M = 4m = 320$ кг.

6. $v_M = v$, $v_1 = \frac{2m_2v}{m_1+m_2}$, $v_2 = \frac{2m_1v}{m_1+m_2}$; $v'_M = 2v$, $v'_1 = \frac{4m_2v}{m_1+m_2}$, $v'_2 = \frac{4m_1v}{m_1+m_2}$.

7. $u' = \frac{v}{2} \cdot \left(1 - \frac{m}{\sqrt{M(M+m)}}\right)$.

8. $v_0 = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2\cos\varphi}$.

9. $\beta_{\max} = \arccos\left(\frac{2v_1v_2}{v_1^2+v_2^2} \cdot \cos\alpha\right)$.

10. $v_6 = \frac{v_0}{64}$, $t = \frac{62a}{v_0}$.

11. $\frac{M}{m} = \pi$.

12. $t_{\min} = \frac{R}{v}$.

13. $u'_2 = \frac{\sqrt{3}}{7} \cdot \sqrt{\frac{T}{m}}$, $\beta_{\max} = \frac{\pi}{6}$.

Пётр А. Крюков