Динамика

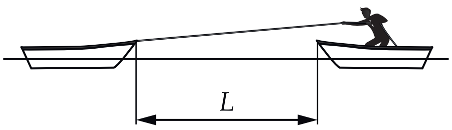
1. Центр масс. Импульс

1. На дне небольшой запаянной пробирки, подвешенной на нити над столом, сидит муха. Её масса равна массе пробирки, а расстояние от дна пробирки до поверхности стола равно длине пробирки L. Нить пережигают, и в процессе падения муха перемещается со дна в самый верхний конец пробирки. Через какое время после пережигания нити нижний конец пробирки ударится о стол?

2. На носу лодки длины L стоит человек, держа на высоте h ядро массы m. Масса лодки вместе с человеком равна M. Человек бросает горизонтально это ядро вдоль лодки. Какую скорость по горизонтали должен сообщить человек ядру (относительно Земли), чтобы попасть в корму лодки? Сопротивление движению лодки не учитывать.

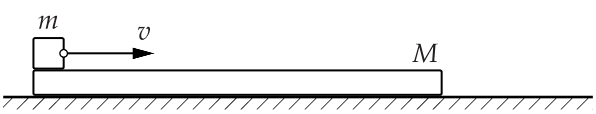
3. На гладком полу стоит сосуд с водой плотностью ρ_0; объём воды равен V_0. Оказавшаяся на дне сосуда улитка объёмом V и плотностью ρ через некоторое время начинает ползти по дну сосуда со скоростью u относительно него. С какой скоростью станет двигаться сосуд по полу? Массой сосуда можно пренебречь, считайте, что уровень воды всё время остаётся горизонтальным.

4. Человек, стоящий в лодке, подтягивает вторую такую же лодку за верёвку до их соприкосновения и далее удерживает их вместе. Массы пустой лодки и человека равны m и M соответственно, начальное расстояние между лодками равно L и значительно больше размера лодки. Сила сопротивления для каждой лодки пропорциональна скорости с одинаковым для обеих лодок коэффициентом. Найдите смещение лодки с человеком к моменту остановки с учётом и без учёта сопротивления воды.



К задаче 4

5. На гладком горизонтальном столе лежит достаточно длинная доска массой M, вблизи одного из торцов которой располагается небольшой массивный кубик массой m. Кубику сообщают скорость v, направленную вдоль доски (см. рисунок). Между кубиком и доской есть трение. Известно, что вектор силы трения направлен противоположно вектору относительной скорости, однако в общем случае характер зависимости величины силы трения от относительной скорости неизвестен: трение может быть сухим, а может быть вязким.



К задаче 5

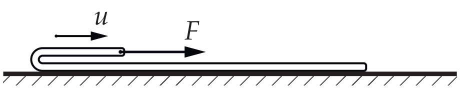
а) Пусть трение между доской и кубиком вязкое, сила трения даётся формулой $\mathbf{F} = -\gamma\mathbf{u}$, где $\mathbf{u}$ — вектор относительной скорости кубика, γ — известный постоянный коэффициент. Какое расстояние проходит кубик относительно доски к моменту окончания процесса проскальзывания?

б) Ответьте на вопрос предыдущего пункта в случае, если трение между кубиком и доской сухое, а коэффициент трения равен μ.

6. С какой силой давит на землю кобра, когда она, готовясь к прыжку, поднимается вертикально вверх с постоянной скоростью v? Масса змеи равна m, её длина — L.

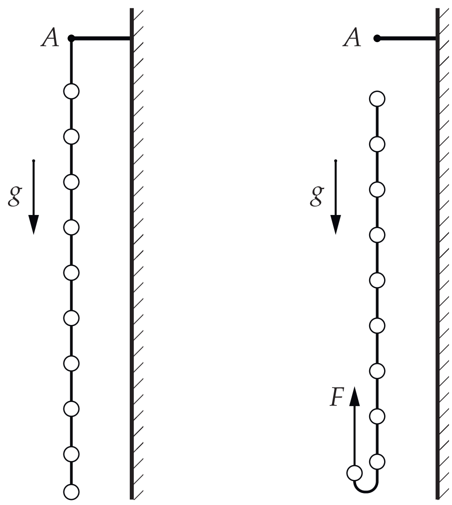
7. Однородная цепочка, висящая вертикально, начинает падать на чашку весов. Как зависит показание весов от времени? Считайте, что в начальный момент нижний конец цепочки касается поверхности чашки.

8. Длинный тонкий гибкий ковёр лежит на полу. Один конец ковра загнули и с постоянной горизонтальной скоростью $u = 1$ м/с потянули назад над той частью ковра, которая покоится. Найдите скорость центра масс движущейся части ковра, если длина ковра равна $L = 1$ м, а его масса равна $m = 1$ кг. Какова минимальная сила, необходимая для того, чтобы тянуть движущуюся часть ковра со скоростью u?



К задаче 8

9. Однородная цепочка массой m и длиной L, состоящая из большого количества маленьких шариков, связанных нерастяжимыми, гибкими тонкими нитями пренебрежимо малой массы, подвешена при помощи ещё одной нити в т. A к закреплённому на стене стержню (как показано на рисунке слева). В некоторый момент времени нить пережигают, и одновременно цепочку начинают тянуть за её нижний конец с постоянной силой F, направленной вертикально вверх (см. рисунок справа).



К задаче 9

Через какое время τ после пережигания нити вся цепочка снова выпрямится? Определите модуль скорости цепочки v сразу после её распрямления. Какое количество теплоты Q выделяется в процессе распрямления цепочки?

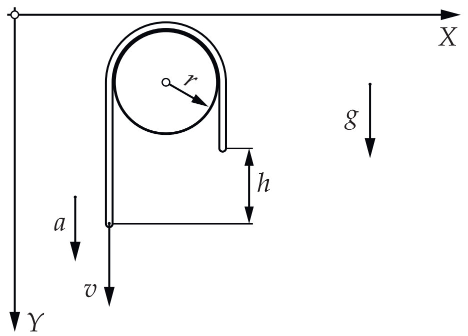
Ускорение свободного падения равно g. Сопротивлением воздуха можно пренебречь. Размеры шариков цепочки много меньше её длины. Взаимодействие шарика с ниткой считайте неупругим.

10. Ракета массой m, движущаяся в космическом пространстве с выключенным двигателем и начальной скоростью v_0, попадает в облако пыли с плотностью ρ и протяжённостью L (в направлении движения ракеты). Пылинки неподвижны и при столкновении с ракетой прилипают к ней. Площадь поперечного сечения ракеты равна S. Определите, с какой скоростью ракета выйдет из облака. Сколько времени займёт прохождение ракеты через облако?

11. Ракета массой m, летящая в космическом пространстве с включённым двигателем попадает в облако пыли, имеющее протяжённость L в направлении движения ракеты. Плотность пылинок в облаке увеличивается прямо пропорционально расстоянию, пройденному ракетой в облаке. Пылинки неподвижны и прилипают к ракете при столкновении с ней. В момент перед попаданием в облако скорость ракеты равна v_0. Сила тяги двигателя постоянна и равна F_0. К моменту вылета из облака масса ракеты увеличивается в два раза за счёт налипшей на неё пыли.

С какой скоростью v_1 ракета вылетает из облака? Сколько времени τ занимает пролёт ракеты через облако? Какое количество теплоты Q выделяется в процессе взаимодействия частиц пыли с ракетой в течение времени τ?

12. Нерастяжимый канат, масса которого распределена равномерно по длине с линейной плотностью ρ (кг/м), перекинут через закреплённый цилиндр радиусом r, ось которого горизонтальна (см. рисунок). Под действием внешних сил канат движется так, что скорости его концов в любой момент времени направлены вертикально и равны по модулю. Когда разность длин вертикальных частей каната стала равна h, скорость и ускорение левого конца каната оказались равны v и a соответственно. Найдите горизонтальную F_x и вертикальную F_y проекции суммы всех сил, действующих на канат в этот момент времени.

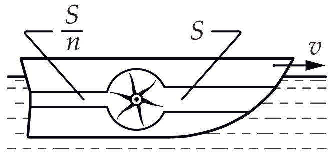


К задаче 12

13. Два точечных тела массой m могут скользить по жёстким спицам, расположенным под прямым углом в одной плоскости. Тела притягиваются с силой F, не зависящей от расстояния между ними. Изначально тела удерживают на расстояниях l и $2l$ от точки пересечения спиц и в некоторый момент одновременно отпускают. Какое из них первым достигнет точки пересечения? Найдите время его движения. Силой тяжести и трением пренебречь.

2. Системы переменного состава

14. Реактивное судно (см. рисунок) приводится в движение насосом, который всасывает воду через входное отверстие горизонтального канала и выбрасывает её в противоположном направлении. Относительная скорость воды на входе равна u, площади входного отверстия и выходного отверстий равны S и $\frac{S}{n}$ соответственно. Масса судна с находящей в нём водой равна M. Найдите установившуюся скорость судна, а также его ускорение в начальный момент, считая, что на судно действует сила сопротивления, пропорциональная квадрату скорости: $F_x = -kv_x^2$ (k — известная константа).



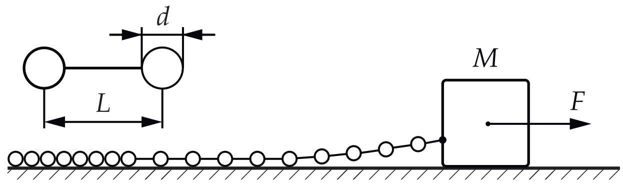
К задаче 14

15. Предложен следующий проект ракетного космического двигателя: луч лазера направляется на кусок льда, помещённый в резервуар с отверстием площадью S. Мощность лазера N полностью идёт на испарение льда. Удельная теплота испарения льда и плотность пара, выходящего через сопло из двигателя, равны: λ и ρ. Найдите силу тяги такого двигателя.

16. Какую массу газов $\mu(t)$ должна ежесекундно выбрасывать ракета, чтобы оставаться неподвижной в поле тяжести? Считайте, что в нулевой момент масса ракеты равна M_0, скорость истекающих газов относительно ракеты равна u. Сначала ответьте на вопрос для малых значений t. Какому сильному неравенству вида $\alpha t \ll \beta$ должно удовлетворять значение времени t, чтобы его можно было считать малым в этой задаче? За какое время $t_{1/2}$ масса ракеты уменьшится в два раза? Какими будут ответы на вопросы задачи, если ракета движется вверх с ускорением a?

17. Ракета, оснащённая реактивным двигателем, движется прямолинейно. В начальный момент ракета покоилась и её масса равнялась m_0. Относительная скорость истечения газов из сопла ракеты постоянна и равна u, действием внешних сил можно пренебречь. При каком значении массы ракеты следует выключить её двигатель, чтобы импульс приобретённый ракетой оказался максимальным? Чему равен этот максимальный импульс?

18. На гладкой горизонтальной поверхности разложена очень длинная цепочка, состоящая из бусинок массой $m = 2$ г, соединённых тонкими нерастяжимыми нитками.



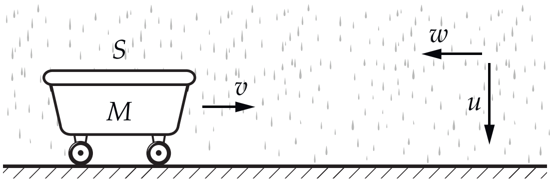
К задаче 18

Диаметр бусинки равен $d = 4$ мм, расстояние между центрами бусинок (когда нить натянута) равно $L = 2{,}2$ см.

Пётр А. Крюков

Конец цепочки прикреплен к кубику массой $M = 1$ кг. Массой нитки по сравнению с массой бусинки можно пренебречь. Сначала все бусинки цепочки касаются друг друга. В некоторый момент к кубику прикладывают силу $F = 1$ Н, и он начинает ускоряться, вовлекая в движение бусинки. Чему равна скорость кубика через полсекунды после начала движения? Определите скорость кубика спустя длительное время после начала движения и найдите среднюю тепловую мощность, рассеиваемую при этом в окружающую среду.

19. Тазик на колёсиках движется под дождём по горизонтальной дороге. Суммарная масса капель в единице объёма равна ρ, а их скорость вблизи поверхности земли равна u. Площадь верхнего горизонтального сечения тазика равна S. В нулевой момент ($t = 0$) таз пустой, его масса вместе с колёсами равна M, а скорость равна v_0. Далее везде силой трения качения и силой сопротивления воздуха можно пренебречь.



К задаче 19

а) Пусть в дне таза есть небольшое отверстие. Дождевая вода, попадая в таз, стекает на дно, распределяется по нему тонким слоем и вытекает через отверстие. Можно считать, что масса воды в тазу пренебрежимо мала по сравнению с массой таза.

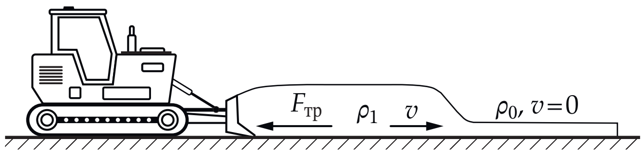
а1) Какое расстояние L_1 пройдёт таз до остановки, если капли падают вертикально?

а2) Подул встречный (для тазика) ветер, так что горизонтальная составляющая скорости капель вблизи земли оказалась равна w, а вертикальная — равна u. Какое расстояние L_2 пройдет тазик до остановки, если время движения равно t?

б) В этой части задачи считается, что дырок в тазике нет, вся попадающая в таз дождевая вода остаётся в нём. За рассматриваемое время вода не заполняет таз целиком и не переливается через борт. Ветра нет, скорость капель направлена вертикально. Определите зависимость скорости таза от времени $v(t)$ в этом случае. Если таз проходит расстояние L_M к моменту, когда масса воды в нём становится равна массе таза M, то какое расстояние он пройдёт к моменту, когда масса воды в нём станет равна $3M$?

20. Труба радиусом r заполнена пористым веществом плотностью ρ_0. Поршень, на который действует постоянная сила F, двигаясь в трубе, уплотняет вещество до плотности ρ. С какой скоростью движется поршень, если уплотнение вещества происходит скачком, иначе говоря, в трубе перемещается с некоторой скоростью плоская граница раздела между веществом с плотностью ρ_0 и веществом с плотностью ρ? В начальный момент времени эта граница совпадает с поверхностью поршня.

21. Некоторые особенности процесса сгребания снега бульдозером можно описать на основе следующей простейшей модели. Вдали от бульдозера (рис. ниже) слой снега в полосе шириной с щит бульдозера имеет линейную плотность ρ_0 и покоится. Бульдозер и часть снега, прилегающая к его щиту, движутся с постоянной скоростью v. На движущуюся часть действует сила трения, удовлетворяющая закону Кулона-Амонтона: $F_{тр} = \mu N$; коэффициент трения μ считается известным.

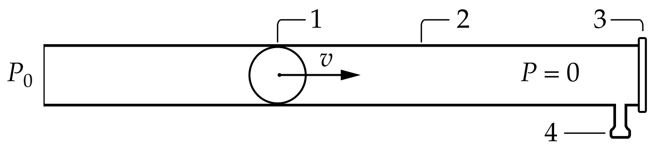


К задаче 20

а) Пусть весь снег, вовлекаемый бульдозером в движение, распределяется в движущейся части со средней постоянной линейной плотностью ρ_1. Бульдозер в состоянии действовать на движущуюся часть с горизонтальной силой, не превышающей значения F_0. Найдите время, в течение которого возможно движение бульдозера с постоянной скоростью v.

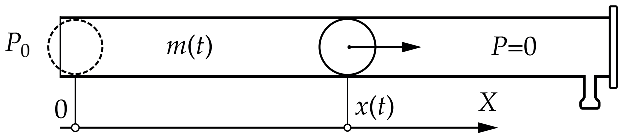
б) Пусть после того, как масса снега в движущейся части достигает некоторого значения M_0, она перестаёт увеличиваться. При вовлечении в движение небольшой порции снега, такая же порция покидает движущуюся часть, скатываясь вбок относительно направления движения. Какую полезную мощность W_1 должен развивать бульдозер при движении с постоянной скоростью v в этом случае?

22. Устройство под названием «вакуумная пушка» схематично изображено на рисунке ниже. В полипропиленовой водопроводной трубе 2, один конец которой герметично закрыт заглушкой из фольги 3, а другой открыт в атмосферу, разностью давлений ускоряется шарик 1 для игры в пинг-понг массой $M = 2{,}7$ г. Внутренний диаметр трубы близок к диаметру шарика, который равен $d = 40$ мм. Рядом с заглушкой располагается штуцер 4, через который труба соединяется с вакуумным насосом. Таким образом, справа от шарика давление очень низкое, а у открытого конца трубки — давление, близкое к атмосферному, которое равно $P_0 = 10^5$ Па. За счёт разности давлений шарик разгоняется до высокой скорости, разрывает фольгу заглушки и вылетает из трубки.



К задаче 22

В приближённой модели явления движение шарика и воздуха, располагающегося в трубе слева от шарика, рассматривается как движение тела с переменной массой. Считается, что под действием разности давлений ускоряются шарик и воздух внутри трубки, а также вовлекаются в движение новые порции воздуха из атмосферы. Другими силами предлагается пренебречь. Считается, что область вблизи левого торца трубы, в которой воздух вовлекается в движение, имеет малый характерный размер, сопоставимый с диаметром трубы. Снаружи трубы вне этой области воздух считается неподвижным, его плотность в любой точке равна $\rho = 1{,}2$ кг/м^3. Внутри трубы воздух движется со скоростью шарика, а его плотность такая же как снаружи. Диаметр шарика много меньше длины трубы. В начальный момент времени координата x шарика (см. рисунок) и его скорость равны нулю.



К задаче 22

Определите максимальную скорость, до которой может быть разогнан шарик в трубе достаточно большой длины. Получите формулу зависимости координаты шарика от времени $x(t)$.

23. На турнике, представляющем собой тонкий гладкий, горизонтально расположенный стержень небольшого радиуса, висит однородная тяжёлая верёвка длиной L. В начальный момент длины свисающих с турника концов верёвки равны, и она покоится. От небольшого толчка верёвка приходит в движение. На какое расстояние переместится любой из концов верёвки к тому моменту времени, когда верёвка перестанет взаимодействовать с турником? Как зависит сила натяжения верёвки вблизи турника (на уровне его оси) от расстояния x, пройденного любым из концов верёвки в процессе соскальзывания?

24. Один конец однородной верёвки массой m и длиной L закреплён на потолке комнаты. Другой конец верёвки сначала удерживают рядом с закреплённым концом, а затем отпускают. Предполагая, что механическая энергия верёвки сохраняется, а в точке перегиба характерное значение радиуса кривизны верёвки значительно меньше L, найдите зависимость ускорения падающего конца верёвки от расстояния x между ним и потолком.

25. Тонкая гибкая нерастяжимая нить длиной L, сложенная пополам, находится внутри тонкой горизонтальной гладкой трубки. Один конец нити закреплён, и примыкающая к нему половина остаётся неподвижной, тогда как всем точкам второй половины сообщается начальная скорость v_0. Определите время t, за которое нить полностью распрямится, а также длину S неподвижной части нити в момент, когда скорость точки изгиба достигнет скорости звука c (так называемый «эффект кнута»).

Считайте, что точки движущейся части нити в любой момент имеют одинаковую скорость. Взаимодействие элементов нити считайте упругим.

26. Шарообразная капля воды падает в атмосфере пересыщенного водяного пара. Считая, скорость возрастания массы капли $\frac{dm}{dt}$ пропорциональной площади её поверхности S, и пренебрегая силой сопротивления, определите зависимость скорости капли от времени $v(t)$. Предполагается, что в момент зарождения капли ($t = 0$), её скорость была равна нулю. Ускорение свободного падения равно g. Как изменится ответ, если предположить, что скорость возрастания массы капли пропорциональна произведению площади её поверхности S на скорость движения v?

3. Ответы

1. $t = \sqrt{\frac{L}{g}}$.

2. $v_m = \sqrt{\frac{g}{2h}} \cdot \frac{LM}{M+m}$.

3. $v = \frac{uV(\rho_0-\rho)}{\rho V+\rho_0 V_0}$.

4. $\Delta L = \frac{L}{2}$ (если учитывать силу сопротивления) и $\Delta L = \frac{Lm}{2m+M}$, если сила сопротивления не учитывается.

5. а) $S_1 = \frac{\mu v}{\gamma} = \frac{mM}{m+M} \cdot \frac{v}{\gamma}$; б) $S_2 = \frac{v^2}{2a_{mM}} = \frac{Mv^2}{2\mu g(M+m)}$.

6. $F = mg + m\frac{v^2}{l}$.

7. $P = 3Mg \cdot \frac{gt^2}{2L}$.

8. $v_{\text{cm}} = \frac{3u}{4} = 75$ см/с, $F = \frac{mu^2}{2L} = 0{,}5$ Н.

9. $\tau = \sqrt{\frac{2Lm}{F}}$, $v = \left|g - \frac{F}{m}\right| \cdot \sqrt{\frac{2Lm}{F}}$, $Q = FL$.

10. $v(L) = \frac{mv_0}{\rho SL+m}$, $t = \frac{\rho SL^2+2mL}{2mv_0}$.

11. $v_1 = \sqrt{\frac{2F_0L}{3m} + v_0^2}$, $\tau = \frac{2m}{F_0}\left(\sqrt{\frac{2F_0L}{3m} + v_0^2} - v_0\right)$, $Q = \frac{F_0L}{3} + \frac{mv_0^2}{4}$.

12. $F_x = 2\rho ra$, $F_y = \rho\left(ha + 2v^2\right)$.

13. Тела одновременно окажутся в точке пересечения спиц через время $\tau = \sqrt{\frac{2\sqrt{5}mL}{F}}$.

14. $v_{\text{уст}} = u\sqrt{\frac{\rho S(n-1)}{k}}$, $a = \frac{\rho Su^2(n-1)}{M}$.

15. $F = \frac{N^2}{\rho S\lambda^2}$.

16. $\mu = \frac{M_0 g}{u}$ при $gt \ll u$. $\mu(t) = \frac{M_0 g}{u}e^{-\frac{gt}{u}}$, $t_{1/2} = \frac{u\ln 2}{g}$; в случае движения с ускорением a, во всех формулах следует заменить g на ускорение $g_1 = g + a$.

17. $m = \frac{m_0}{e}$, $P_{\max} = \frac{m_0 u}{e}$.

18. $v(0{,}5\ \text{с}) \approx 0{,}5$ м/с; $v = \sqrt{\frac{F(L-d)}{m}} = 3$ м/с; $N = \frac{Fv}{2} = 1{,}5$ Вт.

19. а1) $L_1 = \frac{Mv_0}{\rho uS}$; а2) $L_2 = \frac{Mv_0}{\rho uS} - wt$. б) $v(t) = \frac{Mv_0}{M+\rho uSt}$, $L_{3M} = 2L_M$.

20. $v = \sqrt{\frac{F(\rho-\rho_0)}{\pi r^2\rho\rho_0}}$.

21. а) $t = \frac{F_0}{\mu gv} \cdot \frac{\rho_1-\rho_0}{\rho_1\rho_0} - \frac{v}{\mu g}$; б) $W_1 = \mu M_0 gv + \rho_0 v^3$.

22. $u = \sqrt{\frac{P_0}{\rho}} \approx 294$ м/с; $x(t) = -\frac{M}{\rho S} + \sqrt{\left(\frac{M}{\rho S}\right)^2 + \frac{P_0 t^2}{\rho}}$.

23. $v = \sqrt{\frac{gL}{2}}$, $T(x) = \frac{mg}{2}\left(1 - \frac{4x^2}{L^2}\right)$.

24. $a = g\left(1 + \frac{x(2L-x)}{(L-x)^2}\right) > g$.

25. $t = \frac{2L}{3v_0}$, $S = L \cdot \left(1 - \frac{v_0^2}{8c^2}\right)$.

26. $v(t) = \frac{gt}{4}$, $v(t) = \frac{gt}{7}$.

Пётр А. Крюков