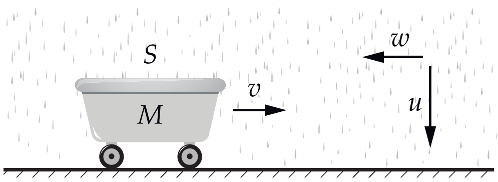
Условия задач, авторские решения и критерии оценивания

1. Таз на колёсиках (12 баллов)

Фольклор

Тазик на колёсиках движется под дождём по горизонтальной дороге. Суммарная масса капель в единице объёма равна ρ, а их скорость вблизи поверхности земли равна u. Площадь верхнего горизонтального сечения тазика равна S. В нулевой момент ($t = 0$) таз пустой, его масса вместе с колёсами равна M, а скорость равна v_0 ($v_0 \ll u$). Далее везде силой трения качения и силой сопротивления воздуха можно пренебречь.



А. Пусть в дне таза есть небольшое отверстие. Дождевая вода, попадая в таз, стекает на дно, распределяется по нему тонким слоем и вытекает через отверстие. Можно считать, что масса воды в тазу пренебрежимо мала по сравнению с массой таза.

А1) Какое расстояние L_1 пройдёт таз до остановки, если капли падают вертикально? (*5 баллов*)

А2) Подул встречный (для тазика) ветер, так что горизонтальная составляющая скорости капель вблизи земли оказалась равна w, а вертикальная — равна u. Какое расстояние L_2 пройдет тазик до остановки, если время движения равно t? (*2 балла*)

В. В этой части задачи считается, что дырок в тазике нет, вся попадающая в таз дождевая вода остаётся в нём. За рассматриваемое время вода не заполняет таз целиком и не переливается через борт. Ветра нет, скорость капель вертикальна.

В1) Определите зависимость скорости таза от времени $v(t)$ в этом случае. (*2 балла*)

В2) Если таз проходит расстояние S к моменту, когда масса воды в нём становится равна массе таза M, то какое расстояние он пройдёт к моменту, когда масса воды в нём станет равна $3M$? (*3 балла*)

Решение

А. А1) За время dt в таз поступает дождевая вода массой $dm = \rho uS \cdot dt$, имеющая нулевую проекцию импульса на горизонтальную ось. От скорости таза выражение для dm не зависит, что более подробно объясняется в ответе на вопрос п. А2. Вода той же массы dm вытекает через отверстие. Горизонтальный импульс системы, состоящей из таза и двух порций воды массой dm (поступающей в таз и вытекающей через отверстие) должен сохраняться, поскольку в горизонтальном направлении на эту систему не действуют внешние силы. Записывая закон сохранения импульса, приходим к соотношению

$$Mdv = -vdm. \qquad (1)$$

Выражение в правой части формулы (1) может быть записано в виде $vdm = dL \cdot \rho uS$, где dL — расстояние, пройденное тазом за время dt. Интегрируя (или суммируя, если формула (1) записана через малые конечные разности), получаем равенство

$$Mv_0 = L_1 \rho uS,$$

из которого следует ответ на первый вопрос:

$$L_1 = \frac{Mv_0}{\rho uS}.$$

А2) В этом случае масса воды dm, попадающая в таз, «приносит» горизонтальный импульс $dp = -wdm$, поэтому после преобразования соотношения, отражающего закон сохранения импульса, получится уравнение

$$Mdv = -vdm + wdm. \qquad (2)$$

Отметим, что наличие ветра никак не меняет выражение для массы воды $dm = \rho uS \cdot dt$, попадающей в таз за время dt, поскольку увеличение относительной скорости потока воды, поступающей в таз, компенсируется уменьшением площади сечения этого потока в то же самое число раз, что легко подтверждается простым расчётом. Отсюда также следует, что и от скорости таза величина массы dm не зависит, — это соображение использовалось при записи соотношения (1). Интегрирование (или суммирование) уравнения (2) даёт ответ:

$$L_2 = \frac{Mv_0}{\rho uS} - wt.$$

В. В1) Легко видеть, что закон сохранения импульса в этом случае записывается так:

$$(M + m(t))v(t) = Mv_0, \qquad (3)$$

где $m(t) = \rho uSt$ — масса воды, попадающей в таз за время t. Выразив скорость из равенства (3), получим ответ:

$$v(t) = \frac{Mv_0}{M + \rho uSt}. \qquad (4)$$

В2) Обозначим: $t_0 = \dfrac{M}{\rho US}$, $x = \dfrac{t}{t_0}$, тогда из условия и формулы (4) следует равенство

$$S = v_0 t_0 \cdot A(1;2), \qquad (5)$$

в котором $A(1;2)$ — это площадь фигуры, ограничиваемой гиперболой $f(x) = \frac{1}{x}$, прямыми $x = 1$, $x = 2$ и осью абсцисс.

Аналогично формуле (5), искомое расстояние можно выразить через площадь под гиперболой:

$$S_1 = v_0 t_0 \cdot A(1;2) + v_0 t_0 \cdot A(2;4).$$

Если мы умеем интегрировать, то знаем, что площади $A(1;2)$ и $A(2;4)$ равны:

$$A(1;2) = A(2;4) = \ln 2,$$

поэтому искомое расстояние равно $S_1 = 2S$. Однако, равенство площадей $A(1;2)$ и $A(2;4)$ можно доказать, формально не интегрируя функцию $f(x) = \frac{1}{x}$. Для этого следует разбить первую фигуру на N ($N \gg 1$) тонких вертикальных полосок одинаковой толщины, на столько же полосок следует разбить и вторую фигуру. Перенумеруем полоски, на которые разбивается первая фигура, начиная с единицы, слева направо. Аналогичным образом перенумеруем полоски, на которые разбивается вторая фигура. Тогда высота k-ой полоски для второй фигуры в два раза меньше высоты k-ой полоски для первой фигуры, а толщина — напротив, в два раза больше. Таким образом, площади полосок с одинаковыми номерами будут равны. Отсюда следует, что будут равны и площади $A(1;2)$ и $A(2;4)$.

Ответ: A1) $L_1 = \dfrac{Mv_0}{\rho u S}$; A2) $L_2 = \dfrac{Mv_0}{\rho u S} - wt$. B1) $v(t) = \dfrac{Mv_0}{M + \rho u S t}$; B2) $S_1 = 2S$.

Критерии

A1) Верный ответ, подкреплённый непротиворечивыми, доказательными рассуждениями, — *5 баллов*. Указано, что масса воды, попадающей в таз в единицу времени, не зависит от скорости таза, но больше ничего не сделано — *1 балл*. Верно записан закон сохранения импульса, как в решении или подобным образом, но не проведено суммирование (интегрирование) — *3 балла*.

A2) Записан только закон сохранения импульса, но суммирование не проведено — *1 балл*. Записан закон сохранения импульса (или аналогичное соотношение), проведено суммирование, получен верный ответ — *2 балла*.

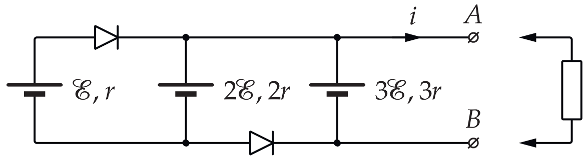
B1) Верно записан закон сохранения импульса, но ответ не получен — *1 балл*. Получен верный ответ, приведено обоснование — *2 балла*.

B2) Написан верный ответ, обоснование не приводится — *1 балл*. Суммирование или интегрирование произведено с вычислительной ошибкой, но идея верная — *1 балл*. Получен верный, обоснованный ответ — *3 балла*.

2. Изобразите характеристику (7 баллов)

По мотивам Ф753, Зильберман А. Р., [1]

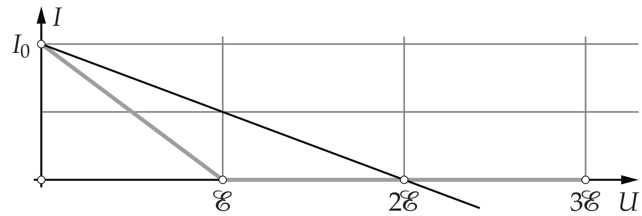
В схеме специального источника напряжения, показанной на рисунке, диоды — идеальные (открываются при близком к нулю напряжении), значения ЭДС и внутреннего сопротивления равны: $\mathscr{E} = 1{,}5$ В и $r = 1{,}0$ Ом соответственно.



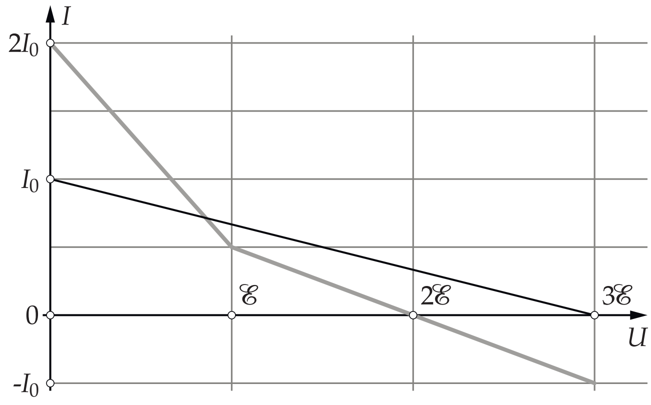
Изобразите графически зависимость $i(U)$ (ВАХ источника), где i — ток, возникающий при подключении к источнику нагрузки, а U — разность потенциалов выводов A и B: $U = \varphi_A - \varphi_B$.

Решение

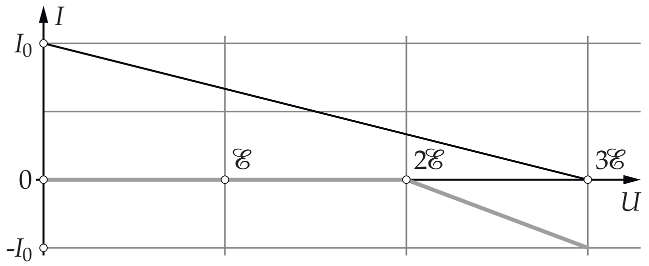
Удобно решать эту задачу, осуществляя графическое сложение вольт-амперных характеристик (ВАХ) разных элементов. Для начала надо понять, что ВАХ источника с ЭДС $\mathscr{E}$, последовательно соединённого с диодом (как в левом звене схемы, данной в условии) выглядит так, как показано на рисунке ниже линией серого цвета увеличенной толщины. Диод словно «отрезает» от вольт-амперной характеристики батарейки участок с отрицательным током. Ток короткого замыкания любой батарейки обозначен I_0 и равен $I_0 = \dfrac{\mathscr{E}}{r}$.



Линией чёрного цвета на том же рисунке показана ВАХ второй батарейки. При параллельном соединении суммируются токи при одинаковом напряжении, поэтому ВАХ участка схемы, состоящего из батареек с ЭДС $\mathscr{E}$ и $2\mathscr{E}$ и диода, соответствует линия серого цвета на рисунке ниже. Линией чёрного цвета изображается ВАХ батарейки с ЭДС $3\mathscr{E}$.



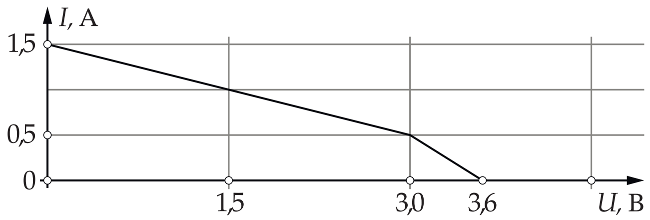
Присоединение второго диода к только что рассмотренному участку цепи приводит к тому, что от характеристики, изображаемой серой линией, как бы отрезается участок с положительными токами, ведь второй диод включен в «неправильной» полярности. Таким образом, перед присоединением батарейки с ЭДС $3\mathscr{E}$ имеем следующую картину (рис. ниже). Линия серого цвета — ВАХ части схемы без третьей батарейки (с ЭДС $3\mathscr{E}$), линия чёрного цвета — характеристика батарейки с ЭДС $3\mathscr{E}$.



Далее производим сложение характеристик по току. Значение разности потенциалов, при котором искомая характеристика пересекает ось абсцисс, легко вычисляется:

$$U_0 = 2\mathscr{E} + \frac{I_0}{3\left(\frac{I_0}{3\mathscr{E}} + \frac{I_0}{2\mathscr{E}}\right)} = 2\mathscr{E} + \frac{2\mathscr{E}}{5} = 2{,}4\mathscr{E}.$$

Подставляя числовые значения, получаем искомую характеристику (см. рис. ниже). Поскольку при подключении реактивной нагрузки (резистора), ток не может быть отрицательным, график заканчивается на значении 3,6 В.



Ответ: график зависимости $I(U)$ изображен на рисунке выше.

Критерии

При оценивании этой задачи предлагается за ответ, содержащий правильный график с указанием координат особых точек (точек пересечения с осями координат и точки излома), а также краткое пояснение построения, выставлять полный балл.

Правильный график с указанием координат особых точек без всяких пояснений — *5 баллов*.

Правильно построена часть характеристики для значений тока от 0,5 А до 1,5 А, или в решении указывается, что в этом диапазоне токов ВАХ источника совпадает с ВАХ батарейки с ЭДС $3\mathscr{E}$, но всё остальное сделано неверно — *3 балла*.

Найдено значение максимального напряжения (3,6 В), но график ВАХ отсутствует — *3 балла*.

Изображена правильная характеристика части схемы, содержащей две батарейки (с ЭДС $\mathscr{E}$ и $2\mathscr{E}$) и верхний диод (больше ничего правильного решение не содержит) — *2 балла*.

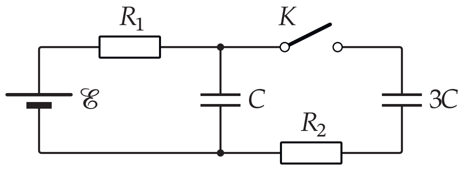
Указывается, что на графике ВАХ должен быть один излом (больше ничего нет) — *1 балл*.

В остальных случаях решение оценивается на усмотрение проверяющего, но с учётом примерной схемы оценивания, описанной выше.

3. Токи через секунду (8 баллов)

Ромашка М. Ю.

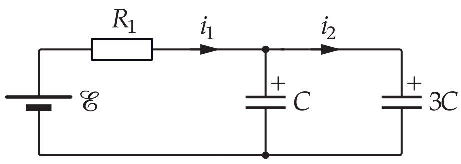
В схеме, показанной на рисунке, ключ K изначально разомкнут, конденсатор ёмкостью $C = 100$ мкФ заряжен, а конденсатор ёмкостью $3C$ не заряжен, ток в цепи равен нулю. Другие параметры схемы равны: $R_1 = 10$ МОм, $R_2 = 10$ Ом, $\mathscr{E} = 12$ В. Внутренним сопротивлением источника и сопротивлением проводов можно пренебречь.



Ключ замыкают. Определите токи i_1 и i_2, текущие через резисторы R_1 и R_2 соответственно, через одну секунду после замыкания ключа.

Решение

В контуре, состоящем из конденсаторов и резистора R_2, заметное изменение зарядов происходит за время порядка $\tau_2 = CR_2 = 10$ мс. С другой стороны, стационарное состояние в цепи устанавливается за время порядка $\tau_1 = RC_1 = 1000$ с. Время $\tau_0 = 1$ с, через которое требуется определить токи, значительно больше τ_2, но значительно меньше τ_1, поэтому в переходном процессе можно выделить две стадии: сначала происходит быстрая перезарядка конденсаторов (напряжения на них выравниваются, а через батарейку протекает пренебрежимо малый заряд), затем заряды и напряжения на конденсаторах меняются очень медленно. Таким образом, можно считать, что конденсаторы почти мгновенно перезаряжаются после замыкания ключа. Дальнейшее изменение зарядов конденсаторов в исходной цепи происходит также, как в цепи, схема которой изображена на рисунке ниже. При этом после быстрой перезарядки напряжения на конденсаторах практически не успевают измениться.



До замыкания ключа заряд конденсатора ёмкостью C равен $q_0 = C\mathscr{E}$, после быстрой перезарядки этот заряд перераспределится между конденсаторами так, что отношение зарядов конденсаторов после перезарядки будет равно отношению их ёмкостей, поскольку напряжение на конденсаторах должно стать одинаковым. Таким образом, на конденсаторе ёмкостью C останется четверть заряда q_0, а на конденсатор ёмкостью $3C$ перейдёт три четверти заряда q_0. Напряжение на конденсаторах будет равно $U = \dfrac{\mathscr{E}}{4}$. За секунду это напряжение почти не успевает измениться, поэтому ток i_1 легко находится из соотношения

$$\mathscr{E} = i_1 R_1 + U.$$

После подстановки численных значений получаем ответ для первого тока: $i_1 = 0{,}9$ мкА.

В процессе медленной зарядки конденсаторов напряжения на них должны быть равны, поэтому для любого момента времени должно быть справедливо равенство

$$\frac{q_1(t)}{C} = \frac{q_3(t)}{3C}, \qquad (1)$$

где q_1 и q_3 — заряды конденсаторов ёмкостью C и $3C$ в момент времени t. Дифференцируя равенство (1) по времени (или рассматривая малые конечные изменения), и учитывая, что ток в проводах, присоединённых к обкладкам конденсатора ёмкостью C, равен $i_1 - i_2$, получим соотношение

$$i_1 - i_2 = \frac{i_2}{3},$$

из которого легко находится ответ для второго тока: $i_2 = 0{,}675$ мкА.

<u>Ответ</u>: $i_1 \approx 0{,}9$ мкА, $i_2 \approx 0{,}68$ мкА.

Критерии

Если представленное школьником решение в целом соответствует авторскому, то выставление баллов осуществляется по схеме, описанной ниже. При этом вычислительные ошибки при правильных рассуждениях приводят к снижению баллов за соответствующий пункт на 50 %.

Найден заряд конденсатора ёмкостью C до замыкания ключа — *1 балл*

Произведён анализ численных значений параметров цепи, на основании которого сделан вывод о том, что в переходном процессе можно выделить две фазы: быструю и медленную — *2 балла.*

Найдены верные значения зарядов и напряжений на конденсаторах после быстрой перезарядки — *1 балл.*

Получен верный ответ для тока i_1 — *1 балл.*

Найдено соотношение, связывающее токи зарядки конденсаторов (показано, что эти токи пропорциональны ёмкостям), — *2 балла.*

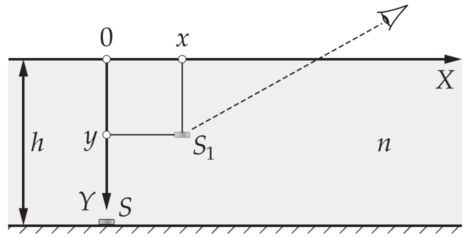
Получен верный ответ для тока i_2 — *1 балл.*

Если решение в принципе отличается от авторского (например, записывается и решается система дифференциальных уравнений для определения токов), то обоснованное решение, приводящее к верным числовым ответам оценивается полным баллом. Решение, содержащее незначительные вычислительные ошибки, но принципиально верное, оценивается в *6 баллов*. Решение, содержащее ошибки в преобразованиях, существенно влияющие на его дальнейший ход, при этом принципиально правильное, оценивается в *3 балла*.

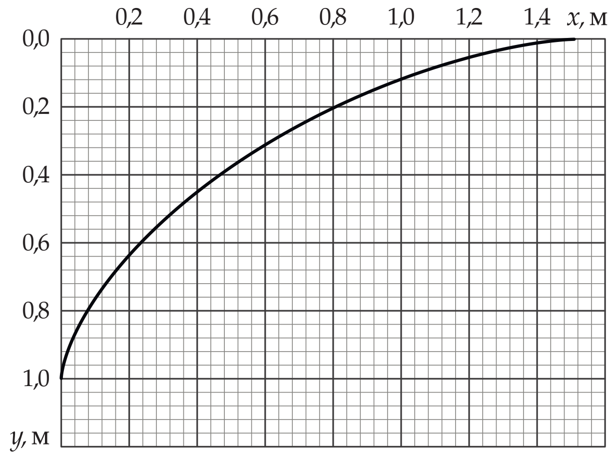
4. Рассматривая монеточку (9 баллов)

Крюков П. А.

На дне сосуда глубиной h, заполненного жидкостью с показателем преломления n, в точке с координатами $(0, h)$ (направление осей показано на рисунке) располагается монеточка S.



Наблюдатель видит изображение монеточки S_1 в точке с координатами (x, y). Множество значений (x, y) для разных углов зрения изображено на графике. Используя график, найдите показатель преломления жидкости n и глубину сосуда h.



Решение

Предлагается рассмотреть крайние точки графика. Изображение монеточки будет лежать на вертикальной оси, при наблюдении под под углом 90° (когда человек смотрит вертикально вниз). При этом, как известно, кажущаяся глубина, на которой наблюдатель будет видеть монетку будет равна

$$h' = \frac{h}{n}, \qquad (1)$$

где h — истинная (не кажущаяся) глубина нахождения монетки, n — показатель преломления жидкости.

Другая крайняя точка соответствует лучам, выходящим из воды почти горизонтально, что происходит, когда лучи, идущие из воды в воздух, падают на границу раздела под углом полного внутреннего отражения α_0. Обозначим координату x точки выхода лучей, идущих под углом α_0, — L. Справедливо очевидное равенство

$$\frac{1}{n} = \sin\alpha_0 = \frac{L}{\sqrt{L^2+h^2}}. \qquad (2)$$

Значения L и h' определяются по графику, например так: $L = 1{,}5$ м, $h' = 1{,}0$ м. Считая, что все длины выражены в метрах, на основании уравнений (1) и (2) можно составить простую систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{h}{n} = 1, \\ \dfrac{1}{n} = \dfrac{1{,}5}{\sqrt{h^2+(1{,}5)^2}}. \end{cases}$$

Решая систему, получим ответ: $n \approx 1{,}34$, $h \approx 1{,}34$ м.
<u>Ответ</u>: $n = 1{,}33 \pm 0{,}05$, $h = 1{,}34 \pm 0{,}05$ м.

Критерии

Поскольку решать задачу можно разными способами, непротиворечивое, обоснованное решение, приводящее к ответам: $n = 1{,}33 \pm 0{,}05$, $h = 1{,}34\pm$ $\pm 0{,}05$ м, оценивается полным баллом (даже если реализован один из вариантов интеллектуального подбора значений). В других случаях решение оценивается на усмотрение проверяющего на основании следующей схемы распределения баллов.

Решение содержит только ответы без какого-либо обоснования — *4 балла*.

Решение содержит непротиворечивые рассуждения, которые в случае аккуратной реализации приводили бы к правильным ответам, однако в силу неаккуратности ответы выходят за рамки установленной погрешности — *6 баллов*.

Решение содержит верные, доказательные рассуждения, но ответы получены неправильные в силу вычислительных ошибок (при условии, что такое же решение без вычислительных ошибок даёт правильные ответы) — *6 баллов*.

Указывается, что истинная глубина сосуда составляет n метров — *2 балла*.

Указывается, что лучи, выходящие из воды в точке с координатами (примерно) $(1{,}5; 0)$, идут в воздухе горизонтально, а в воде под углом полного внутреннего отражения — *3 балла*.

5. О капле (12 баллов)

Крюков П. А.

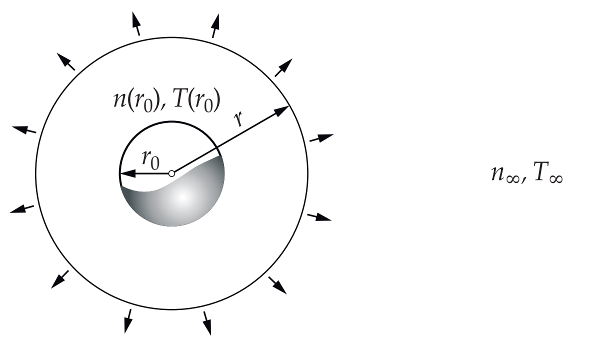
В этой задаче рассматривается эффект уменьшения температуры капли воды вследствие испарения с её поверхности при близких к комнатным давлении и температуре.

В одном из экспериментов шарообразная капля воды радиусом порядка миллиметра удерживалась силами поверхностного натяжения на тонкой полимерной леске. Зависимость температуры капли от времени измерялась с помощью высокоточного инфракрасного тепловизора. Вдали от капли (на «бесконечности») поддерживались постоянные значения: температуры T_∞, давления p_∞ и относительной влажности воздуха φ_∞. Обнаружилось, что если в начальный момент температура капли была равна температуре на бесконечности T_∞, то затем в течение короткого времени она уменьшалась до значения $T_\infty - \Delta T$ (ΔT порядка нескольких градусов) и далее длительное время оставалась постоянной. Предлагается определить величину разности температур ΔT, учитывая диффузию пара от капли на бесконечность и тепловой поток, обусловленный разностью температур капли и воздуха на бесконечности. Конвекцией и передачей тепла по леске предлагается пренебречь.

В стационарном режиме в пространстве вне капли устанавливается распределение концентрации пара $n(r)$ и температуры $T(r)$. В силу сферической симметрии концентрация и температура зависят только от расстояния до центра капли r и удовлетворяют уравнениям:

$$\frac{dN}{dt} = -D\cdot 4\pi r^2\frac{dn}{dr}, \qquad \frac{dQ}{dt} = -\kappa\cdot 4\pi r^2\frac{dT}{dr}.$$

где dN — количество молекул пара, проходящих за время dt через поверхность сферы радиусом r, концентрической с каплей, dQ — количество тепла, переносимого за время dt через поверхность той же сферы; коэффициенты диффузии и теплопроводности D и κ можно считать постоянными. Маленькими стрелками на рисунке символически показан поток диффундирующих молекул пара.



А. Коэффициенты диффузии и теплопроводности D и κ, молярная масса μ_{H_2O}, удельная теплота испарения воды L и радиус капли r_0 считаются известными. Изменение радиуса капли вследствие испарения можно считать незначительным.

А1) Температура у поверхности капли $T(r_0)$ и температура на бесконечности T_∞ (см. рис.) известны. Определите тепловой поток $\dfrac{dQ}{dt}$ и распределение температуры $T(r)$. (*3 балла*)

А2) Известны концентрации пара: $n(r_0)$ и n_∞, определите массу воды, испаряющейся с поверхности капли за малое время t. (*1 балл*)

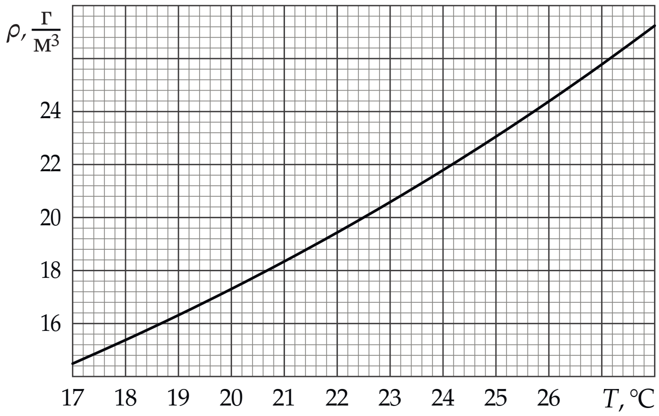
А3) Используя результаты пунктов А1) и А2), выразите разность плотностей пара у капли и на бесконечности $\Delta\rho = \rho(r_0) - \rho_\infty$ через разность температур $\Delta T = T_\infty - T(r_0)$. (*1 балл*)

B. Отношение коэффициентов теплопроводности и диффузии в условиях задачи удовлетворяет соотношению:

$$\frac{\kappa}{D} = \frac{v_\text{в}}{v_{H_2O}} \cdot \frac{c_V \rho_\text{в}}{\mu_\text{в}},$$

где v_{H_2O} и $v_\text{в}$ — среднеквадратичные скорости молекул воды и воздуха, $c_V = 2{,}5R$ — молярная теплоёмкость воздуха при постоянном объёме, $\rho_\text{в}$ — плотность воздуха. Определите отношение коэффициентов при температуре 300 К. При расчёте плотности давление воздуха можно считать равным 10^5 Па. Универсальная газовая постоянная равна $R = 8{,}3$ Дж/(моль · К), молярные массы воды и воздуха: $\mu_{H_2O} = 18$ г/моль и $\mu_\text{в} = 29$ г/моль соответственно. Убедитесь в том, что при изменении температуры на 10 К отношение коэффициентов меняется незначительно. (*1 балл*)

C. Используя график зависимости плотности насыщенного пара воды от температуры, приведённый на рисунке ниже, а также результаты, полученные в частях **A** и **B**, определите как можно точнее величину разности температур ΔT, для следующих значений параметров на бесконечности: $T_\infty = 27$ °C, $\varphi_\infty = 70$ %. Удельная теплота испарения воды и давление воздуха равны: $L = 2{,}4 \cdot 10^6$ Дж/кг и $p_0 = 10^5$ Па соответственно. (*6 баллов*)



Примечание. При выполнении заданий части **A** может оказаться полезной формула:

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{a}.$$

Решение

A. A1) Поскольку процесс стационарный, тепловой поток через поверхность сферы любого радиуса r ($r > r_0$) должен быть равен тепловому потоку на поверхности капли. Обозначим: $q = \dfrac{dQ}{dt}$, тогда из уравнения теплопроводности следует равенство

$$\frac{q\,dr}{4\pi r^2} = -\kappa dT. \tag{1}$$

Интегрируя это равенство от r_0 до ∞, получим соотношение

$$\frac{q}{4\pi r_0} = -\kappa\left(T_\infty - T(r_0)\right). \tag{2}$$

На самом деле, можно обойтись без интегрирования, ведь выражение (1) очень похоже на выражение, возникающее при вычислении потенциала поля точечного заряда:

$$\frac{q\,dr}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = -d\varphi.$$

Используя аналогию, можно получить соотношение (2), формально не интегрируя. Выразим из равенства (2) тепловой поток:

$$q = -4\pi\kappa r_0\left(T_\infty - T(r_0)\right). \tag{3}$$

Отрицательное значение потока обусловлено тем, что тепло переносится из бесконечности на каплю. Отметим, что в формуле (2) можно заменить r_0 на r ($r > r_0$) и получится верное равенство

$$\frac{q}{4\pi r} = -\kappa\left(T_\infty - T(r)\right). \tag{4}$$

Разделив равенство (4) на равенство (2), легко получим распределение температуры:

$$T(r) = T_\infty - \left(T_\infty - T(r_0)\right) \cdot \frac{r_0}{r}. \tag{5}$$

A2) Действуя полностью аналогично пункту A1), получим выражение для потока частиц

$$\frac{dN}{dt} = 4\pi D r_0\left(n(r_0) - n_\infty\right).$$

Умножая это выражение на массу молекулы $m_0 = \dfrac{\mu_{H_2O}}{N_A}$, находим поток массы, испаряющейся с поверхности капли

$$\frac{dm}{dt} = 4\pi D r_0\left(n(r_0) - n_\infty\right) \cdot \frac{\mu_{H_2O}}{N_A}.$$

Как следует из последнего равенства за время t испаряется масса

$$m = 4\pi D r_0 t\left(n(r_0) - n_\infty\right) \cdot \frac{\mu_{H_2O}}{N_A}. \tag{6}$$

A3) За время t к капле подводится количество теплоты $Q = -qt$ (напоминаем, что $q < 0$). Это количество теплоты идёт на испарение массы m: $Q = Lm$. Из этих рассуждений и формул (3) и (6) следуют равенства:

$$Lm = -qt \quad \Rightarrow \quad LD\left(\rho(r_0) - \rho_\infty\right) = \kappa\left(T_\infty - T(r)\right).$$

При выводе плотность была выражена через концентрацию: $\rho = n\dfrac{\mu_{H_2O}}{N_A}$. В итоге получаем важное для дальнейшего соотношение

$$\Delta\rho = \frac{\kappa}{LD}\Delta T. \tag{7}$$

Обратите внимание на то, что разность плотностей зависит только от констант и разности температур, но не зависит от размера капли.

B. Для удобства расчёта сначала преобразуем формулу из условия, выразив скорости через температуру, а плотность воздуха через давление и температуру. Получится формула

$$\frac{\kappa}{D} = \sqrt{\frac{\mu_{H_2O}}{\mu_в}} \cdot \frac{2{,}5p}{T}.$$

Подставляя в эту формулу значения: $p = 10^5$ Па и $T = 300$ К получим значение отношения коэффициентов:

$$\frac{\kappa}{D} \approx 0{,}657 \cdot 10^3\ \frac{\text{Дж}}{\text{К} \cdot \text{м}^3}.$$

Легко видеть, что при уменьшении температуры на 10 К отношение коэффициентов становится равно

$$\frac{\kappa}{D} \approx 0{,}679 \cdot 10^3\ \frac{\text{Дж}}{\text{К} \cdot \text{м}^3}.$$

Для вычислений в следующей части задачи потребуется отношение: $A = \dfrac{\kappa}{LD}$, где $L = 2{,}4 \cdot 10^6$ Дж/кг — удельная теплота испарения воды. Вычислим это отношение для температуры 300 К. Получится:

$$A = \frac{\kappa}{LD} \approx 0{,}274\ \frac{\text{г}}{\text{К} \cdot \text{м}^3}. \qquad (8)$$

C. Пар у поверхности капли — насыщенный, при этом его температура равна температуре воздуха у поверхности капли, которая в этой части задачи обозначается просто T. Формула (7) с учётом введённого в предыдущей части обозначения (8) может быть записана так:

$$\rho(T) - \varphi_\infty \rho(T_\infty) = A(T_\infty - T). \qquad (9)$$

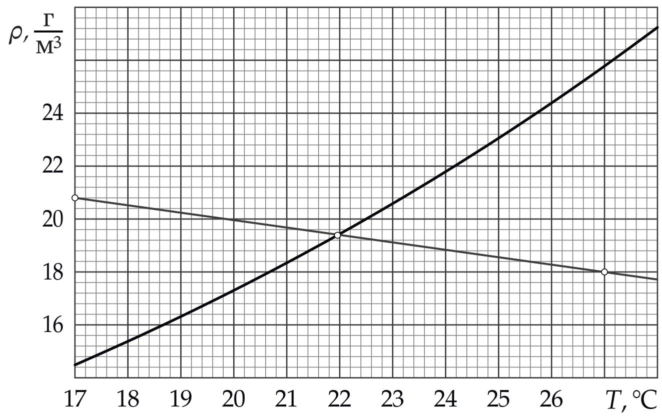
Здесь $\rho(T)$ — плотность насыщенного пара при неизвестной температуре капли T, $\rho(T_\infty)$ — плотность насыщенного пара при температуре T_∞. Легко видеть, что соотношение (9) задаёт прямую в координатах $(\rho; T)$:

$$\rho(T) = \varphi_\infty \rho(T_\infty) + A(T_\infty - T).$$

После подстановки числовых значений ($\varphi_\infty \rho(T_\infty) = 0{,}7\rho(27) \approx 18$) уравнение прямой приводится к виду:

$$\rho(T) = 18 + 0{,}274 \cdot (27 - T). \qquad (10)$$

В формуле (10) температура измеряется в градусах Цельсия, а плотность в г/м^3. Построив прямую по этой формуле, получим точку пересечения прямой с графиком зависимости плотности насыщенных паров от температуры. Температура в этой точке — это и есть температура капли. Осуществив построение (можно рассчитать значение плотности при $T = 17^\circ$ С), получаем значение температуры капли $T \approx 22^\circ$С (рис. ниже иллюстрирует построение). Таким образом, искомая разность температур равна $\Delta T = 5$ К. Отметим, что менее точный способ расчёта состоит в том, что сначала заданная графиком зависимость давления насыщенных паров от температуры линеаризуется, иначе говоря, для неё получается приближённое соотношение вида: $\rho(T) = \rho(T_\infty) + \alpha(T - T_\infty)$, где постоянная α определяется по графику, затем полученная линейная зависимость подставляется в формулу (9). Из полученного уравнения определяется температура капли.



Любопытно, что в статье [2] новосибирских авторов из института теплофизики описывается эксперимент, в котором для параметров на бесконечности: $T_\infty = 27$ °C, $\varphi_\infty = 27$ % наблюдалась разность температур, приближённо равная $\Delta T \approx 11$ К.

Ответ: A1) $q = -4\pi\kappa r_0 \left(T_\infty - T(r_0)\right)$, $T(r) = T_\infty - (T_\infty - T(r_0)) \cdot \frac{r_0}{r}$; A2) $m = 4\pi D r_0 t \left(n(r_0) - n_\infty\right) \cdot \frac{\mu_{H_2O}}{N_A}$; A3) $\Delta\rho = \frac{\kappa}{LD}\Delta T$. B) $\frac{\kappa}{D} \approx 0{,}657 \cdot 10^3\ \frac{\text{Дж}}{\text{К}\cdot\text{м}^3}$.
C) $\Delta T = 5 \pm 0{,}5$ К.

Критерии

Предлагается оценивать решения школьников на основе распределения баллов, указанного в условии, с учётом следующих рекомендаций.

За неверный знак в формуле для потока тепла в п. A1 («+», а не «-») оценка не снижается.

Ошибки при преобразованиях (или вычислительные) в частях **A** и **B** при условии, что принципиально сделано правильно, приводят к снижению баллов за соответствующий пункт на 50 %.

Не совсем точное определение значения ΔT в части **C** вследствие неаккуратности или использования не оптимального метода приводит к снижению баллов, вставляемых за этот пункт, на 50 %.

Список литературы

[1] Зильберман А. Р. Задачник «Кванта», Ф753. — 1982. — Май. — Режим доступа: http://kvant.mccme.ru/1982/05/zadachnik_kvanta_fizika.htm (дата обращения: 2021-02-14).

[2] Borodulin V. Yu., Letushko V. N., Nizovtsev M. I., Sterlyagov A.N. Determination of parameters of heat and mass transfer in evaporating drops // International journal of heat and mass transfer. — 2017. — Vol. 109. — P. 609–618.