81-я Московская олимпиада школьников по физике
2020 год
8 класс

Условия задач, ответы и авторские решения

1. **Крионасос** (8 баллов)
Крюков П. А.

В криогенном эксперименте поток газообразного азота, распространяющийся в вакуумной камере, направляется на охлаждаемую до низкой температуры $T_c = -243°$ С поверхность (криопанель), на которой газ может превращаться в твёрдое тело (процесс десублимации). Скорость потока азота равна $v = 200$ м/с и направлена перпендикулярно криопанели, температура в потоке равна $T_0 = -173°$ С. Определите максимальное значение плотности газообразного азота, при котором на криопанели десублимируется весь натекающий газ. Холодильное оборудование может обеспечить отвод тепла в количестве не более, чем 0,4 Дж с 1 см^2 поверхности криопанели за 1 секунду. Удельная теплота сублимации азота равна $L = 225$ кДж/кг. Удельная теплоёмкость азота (при данных условиях) равна $c = 1{,}0$ кДж/кг °С. Площадь сечения потока на входе равна площади криопанели. Кинетической энергией натекающего газа можно пренебречь.

Решение

Весь натекающий газ будет десублимироваться на криопанели, если количество тепла, отводимого с единицы площади криопанели за единицу времени, будет равно количеству тепла, необходимого для охлаждения натекающего на единицу площади газа от $T_0 = -173°$ С до $T_c = -243°$ С и превращения его в твёрдое тело. На 1 см^2 за время $\Delta t = 1$ с натекает газ массой

$$\Delta m = (v\Delta t) \cdot \rho \cdot 1\ \text{см}^2. \qquad (1)$$

Уравнение теплового баланса имеет вид

$$0{,}4\ \text{Дж} = \Delta m\left((T_0 - T_c) \cdot c + L\right). \qquad (2)$$

Из уравнений (1) и (2) получим искомую плотность

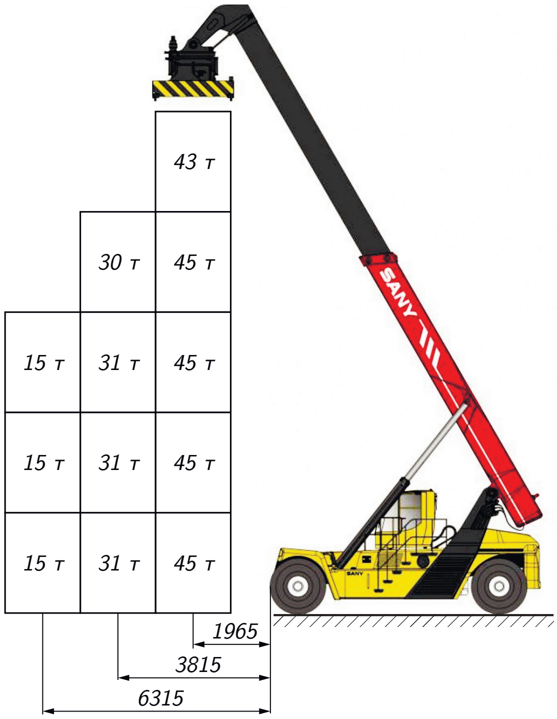
$$\rho = \frac{0{,}4\ \text{Дж}}{1\ \text{см}^2 \cdot 1\ \text{с}} \cdot \frac{1}{v\left(c(T_0 - T_c) + L\right)} \approx 6{,}8 \cdot 10^{-5}\ \text{кг/м}^3.$$

Ответ: $\rho \approx 6{,}8 \cdot 10^{-5}$ кг/м^3.

2. **Ричстакер** (10 баллов)
Крюков П. А., по схеме из [1]

Рисунок справа, на котором изображён погрузчик для работы с контейнерами («ричстакер»), воспроизводит схему из буклета производителя, китайской фирмы «Sany». Прямоугольники символизируют контейнеры, масса которых указана в тоннах. Линейные размеры даны в миллиметрах. Масса этого ричстакера составляет 72 тонны, расстояние между осями передних и задних колёс равно 6 м, внешний диаметр покрышки колеса равен 1670 мм. Рисунок показывает, что при данном расположении погрузчик может приподнять любой из изображённых контейнеров (предварительно убрав другие, если потребуется). При этом угол наклона стрелы и её длина могут изменяться.

1) Пусть ричстакер «разбирает» ближайшую к себе стопку контейнеров. На какую максимальную величину изменяется сила давления передних колёс на поверхность земли в момент, когда погрузчик приподнимает контейнер из этой стопки? Считайте, что в момент подъёма каждого из контейнеров положение погрузчика в точности совпадает с показанным на рисунке. (*4 балла*)



2) На каком расстоянии по горизонтали от оси заднего колеса может располагаться центр тяжести погрузчика, если для его безопасной работы необходимо, чтобы сила давления пары колёс (передних или задних) всегда была не меньше шестой части веса погрузчика без контейнера? (*6 баллов*)

Считайте, что при изменении длины стрелы и её наклона центр тяжести погрузчика по горизонтали не смещается. Ускорение свободного падения равно $g = 10$ Н/кг.

Решение

На рисунке ниже показаны силы, действующие на погрузчик в момент, когда он поднимает верхний контейнер из первой стопки. Такие же по направлению силы действуют на погрузчик, когда он поднимает любой из контейнеров, стоящих в той же стопке ниже. Точка приложения веса контейнера опускается по вертикали, но не меняет своего положения по горизонтали. Ответ на первый вопрос задачи следует из рассмотрения уравнения моментов относительно оси, проходящей через точку, в которой задние колёса касаются земли (т. B). Для погрузчика без контейнера имеем соотношение

$$Mg \cdot y = N_1 \cdot 6000\ \text{мм}, \qquad (1)$$

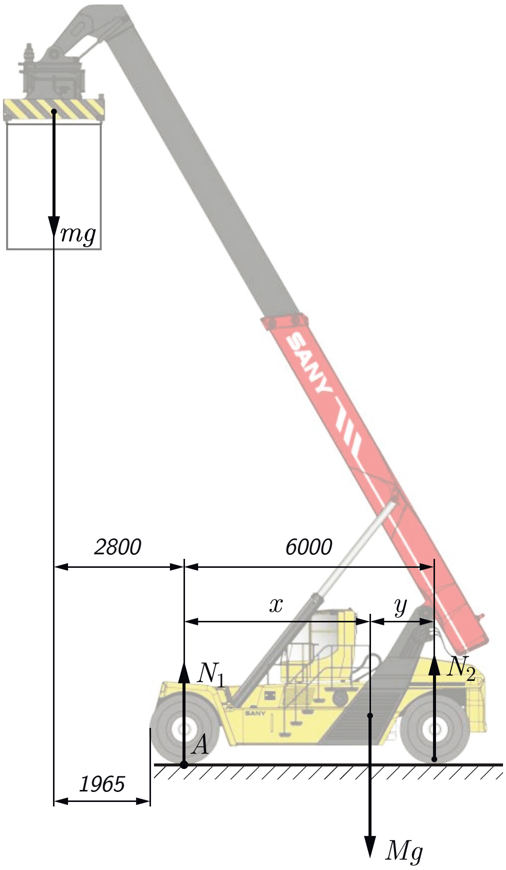
где y — расстояние от оси заднего колеса до центра тяжести погрузчика. Обозначим m — массу контейнера, который поднимает ричстакер. Для погрузчика с контейнером уравнение моментов даёт равенство

$$Mg \cdot y + mg \cdot 8800\ \text{мм} = (N_1 + \Delta N_1) \cdot 6000\ \text{мм}. \qquad (2)$$

Из соотношений (1) и (2) следует формула для изменения силы давления передних колёс

$$\Delta F_1 = \Delta N_1 = mg \cdot \frac{8800}{6000}. \tag{3}$$

Наибольшее изменение силы давления происходит, когда погрузчик приподнимает контейнер массой 45 т. Отсюда следует ответ на первый вопрос: $\Delta F_1^{(\max)} = 660$ кН.



2) Для ответа на второй вопрос сначала выясним как меняется сила давления задних колёс на землю, когда ричстакер приподнимает контейнеры. Без контейнера уравнение моментов относительно оси, проходящей через т. A, имеет вид

$$Mgx = N_2 \cdot 6000 \text{ мм}, \tag{4}$$

Аналогичное соотношение для случая, когда ричстакер приподнимает контейнер из первой стопки выглядит так

$$Mgx = (N_2 - \Delta N_2) \cdot 6000 \text{ мм} + mg \cdot 2800 \text{ мм}, \tag{5}$$

здесь плечо действия веса контейнера равно 2800 мм $= 1965$ мм $+ \dfrac{1670 \text{ мм}}{2}$ Из уравнений (4) и (5) следует формула

$$\Delta N_2 = \frac{2800}{6000} \cdot mg,$$

из которой для максимального изменения силы давления задних колёс при разгрузке первой стопки получается выражение

$$\Delta F_2^{(1)} = \frac{2800}{6000} \cdot (45 \text{ т}) \cdot g \approx (21 \text{ т}) \cdot g. \tag{6}$$

Можно легко получить соотношения, подобные (6), для второй и третьей стопок. Для второй стопки плечо действия веса контейнера равно 3815 мм + 835 мм = 4650 мм, поэтому изменение силы равно

$$\Delta F_2^{(2)} = \frac{4650}{6000} \cdot (31 \text{ т}) \cdot g \approx (24 \text{ т}) \cdot g. \tag{7}$$

Для третьей стопки получится

$$\Delta F_2^{(3)} = \frac{7150}{6000} \cdot (15 \text{ т}) \cdot g \approx (18 \text{ т}) \cdot g. \tag{8}$$

Сравнивая значения из соотношений (6), (7) и (8), видим, что сильнее всего сила давления изменяется, когда рисчтакер приподнимает контейнер из второй стопки. Наибольшее изменение силы давления приближённо равно $(24 \text{ т}) \cdot g = \dfrac{Mg}{3}$, следовательно для безопасности сила давления задних колёс без контейнера должна быть не менее, чем

$$\frac{Mg}{3} + \frac{Mg}{6} = \frac{Mg}{2}.$$

Легко видеть, что это достигается, когда центр тяжести погрузчика располагается правее середины расстояния между осями: $y \leq 3$ м.

Поскольку сила давления передних колёс при разгрузке может только увеличиваться, рассчитаем, где должен находиться центр тяжести погрузчика без контейнера, чтобы сила давления любой пары колёс на землю была не меньше шестой части веса. Сила давления задней пары колёс F_2 численно равна силе реакции N_2, ричстакер находится в равновесии, поэтому уравнение моментов относительно оси, проходящей через т. A, даёт равенство

$$F_2 = \frac{(6 \text{ м}) - y}{6 \text{ м}} \cdot Mg,$$

из которого получаем неравенства:

$$\frac{(6 \text{ м}) - y}{6 \text{ м}} \cdot Mg \geq \frac{Mg}{6} \quad \Rightarrow \quad y \leq 5 \text{ м}. \tag{9}$$

Далее записываем уравнение моментов относительно оси, проходящей через т. B, производим вычисления и получаем неравенство

$$y \geq 1 \text{ м}. \tag{10}$$

На самом деле можно было обойтись без записи уравнения моментов, ведь неравенство (10) следует из соображений симметрии. В результате получаем ответ на второй вопрос: $1 \text{ м} \leq y \leq 3$ м.

Ответ: 1) $\Delta F_1^{(\max)} \approx 660$ кН; 2) $1 \text{ м} \leq y \leq 3$ м.

3. Студент, дельфин, модель (12 баллов)

Крюков П. А., по мотивам [2], [3].

Студент-биофизик исследует физические основы плавания дельфинов. Он рассматривает следующую простую модель.

Объём дельфина складывается из объёма тканей тела $V_\text{Т}$, несжимаемых при погружении, и объёма различных газовых полостей $V_\text{Г}$ (например, лёгких), который при погружении уменьшается под действием давления воды. Студент считает, что согласно газовым законам, произведение давления $P(h)$ на глубине h на объём $V_\text{Г}(h)$ для неизменной массы газа должно оставаться постоянным на всех глубинах:

$$P(h)V_\text{Г}(h) = \text{const}.$$

Пусть дельфин движется вертикально вниз с характерной для себя скоростью v. Расчёты студента показывают, что по достижении *нижней критической глубины* $h_\text{Н} = 30$ м дельфин может продолжать движение вниз, не совершая никаких усилий. Иначе говоря, не создавая силы тяги. При движении вертикально вверх с той же скоростью v, достигнув *верхней критической глубины* $h_\text{В} = 10$ м, дельфин продолжит всплывать, не создавая силы тяги. Атмосферное давление равно $P_0 = 10^5$ Па, плотность воды и ускорение свободного падения равны: $\rho = 1000$ кг/м^3 и $g = 10$ Н/кг. Плотность тканей тела отличается от плотности воды на 2 %. Зависимость силы сопротивления воды от скорости неизвестна.

1) Определите отношение объёма тканей тела к объёму полостей при нулевой глубине $\frac{V_{\text{Т}}}{V_{\text{Г}}(0)}$. Можно считать, что при нулевой глубине газовые полости заполнены воздухом при атмосферном давлении P_0. (*10 баллов*)

2) Экспериментально наблюдаются значения критических глубин: $h_{\text{Н}} \approx 67$ м и $h_{\text{В}} \approx 6$ м. Чем может быть обусловлено расхождение предсказаний модели студента и экспериментальных данных? (*2 балла*)

Решение

1) В момент достижения нижней критической глубины $h_{\text{Н}} = 30$ м сила тяжести уравновешивается силой Архимеда, зависящей от глубины погружения, и силой сопротивления воды, которая зависит от скорости:

$$mg = F_{\text{А}}(h_{\text{Н}}) + F(v). \tag{1}$$

В момент достижения верхней критической глубины $h_{\text{В}} = 10$ м сила Архимеда уравновешивается силой тяжести и силой сопротивления:

$$F_{\text{А}}(h_{\text{В}}) = mg + F(v). \tag{2}$$

Поскольку скорость дельфина считается одинаковой при движении вверх и вниз, из уравнений (1) и (2) получаем соотношение

$$F_{\text{А}}(h_{\text{В}}) + F_{\text{А}}(h_{\text{Н}}) = 2mg,$$

которое легко приводится к виду

$$V_{\text{Г}}(h_{\text{В}}) + V_{\text{Г}}(h_{\text{Н}}) + 2V_{\text{Т}} = 2 \cdot 1{,}02 \cdot V_{\text{Т}}.$$

Теперь из этого соотношения получаем равенство

$$V_{\text{Г}}(h_{\text{В}}) + V_{\text{Г}}(h_{\text{Н}}) = 2 \cdot 0{,}02 \cdot V_{\text{Т}}. \tag{3}$$

Воспользуемся газовым законом, данным в условии, чтобы найти объём газовых полостей внутри тела дельфина на глубине $h_{\text{В}}$ и $h_{\text{Н}}$. Например, для объёма на нижней глубине будет справедлива формула

$$V_{\text{Г}}(h_{\text{Н}}) = \frac{P(0)}{P(0) + \rho g h_{\text{Н}}} V_{\text{Г}}(0) = \frac{V_{\text{Г}}(0)}{1 + \frac{\rho g h_{\text{Н}}}{P(0)}}. \tag{4}$$

Аналогичным образом можно получить формулу для объёма газовых полостей на верхней глубине. Далее (поскольку «цифры хорошие») можно сразу вычислить знаменатель в формуле (4) и в аналогичной формуле для верхней глубины. В итоге получим значения:

$$V_{\text{Г}}(h_{\text{Н}}) = \frac{V_{\text{Г}}(0)}{4}, \quad V_{\text{Г}}(h_{\text{В}}) = \frac{V_{\text{Г}}(0)}{2}.$$

Подставляя найденные значения объёмов в формулу (3), получаем ответ:

$$\frac{V_{\text{Т}}}{V_{\text{Г}}(0)} = \frac{3}{16} \cdot 100 = \frac{75}{4} = 18{,}75.$$

2) Автор статьи, лежащей в основе задачи, выделяет две причины несоответствия экспериментальных данных и предсказаний модели. Во первых, лёгкие дельфина перед тем, как нырнуть, заполняются воздухом несколько превышающим их средний объём. Иначе говоря, дельфин делает глубокий вдох. В процессе движения вниз часть воздуха из лёгких может быть выпущена — за счёт этого понизится нижняя глубина. Однако, если этот воздух, напротив не выпускать — повысится верхняя глубина. Во вторых, сила сопротивления воды может быть разной при движении вверх и вниз.

Ответ: 1) 18,75; 2) Несовершенство модели в том, что газовые полости рассматриваются как герметичный пакет с газом, а на самом деле — это не так. Кроме того, сила сопротивления на верхней критической глубине может отличаться от силы сопротивления на нижней глубине.

4. Акавариум (10 баллов)

Дворянинов С. В.

Аквариум в виде куба с длиной стороны $a = 40$ см заполнен водой доверху. Аквариум начинают очень медленно поворачивать вокруг одного из рёбер, так что угол φ между дном аквариума и горизонтальной поверхностью увеличивается на 1° каждые 10 секунд, при этом вода из аквариума вытекает. Скорость истечения воды количественно характеризует расход $Q = \frac{\Delta m}{\Delta t}$, равный массе воды, вытекающей из аквариума за малое время Δt. Расход Q меняется в зависимости от угла φ. Плотность воды равна $\rho = 1000$ кг/м^3.

1) Найдите (можно приближённо) массу воды, вытекающей из аквариума в первые 10 секунд. (*3 балла*)

2) Чему равен угол φ в момент, когда расход воды Q достигает максимального значения $Q_{\max}$? (*4 балла*)

3) Определите (можно приближённо) максимальное значение расхода $Q_{\max}$. (*3 балла*)

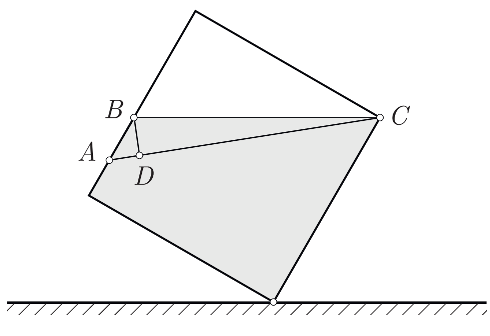
Примечание. При решении задачи могут оказаться полезными следующие геометрические соотношения.

1) Теорема Пифагора. В прямоугольном треугольнике с катетами a, b и гипотенузой c сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы: $a^2 + b^2 = c^2$.

2) Площадь прямоугольного треугольника треугольника с гипотенузой 1 и малым острым углом α приближённо равна $S \approx \frac{\pi\alpha}{360^\circ}$ (α измеряется в градусах). Малыми вполне можно считать углы меньше 10°.

Решение

Поскольку аквариум наклоняют очень медленно, за время Δt из аквариума вытекает вся вода, занимавшая объём ΔV, где V — объём тела, образующегося при сечении куба горизонтальной плоскостью, проходящей через ребро, через которое льётся вода. Изменение объёма ΔV за небольшое время Δt равно объёму маленькой треугольной призмы (см. рис.), похожей на клин. Объём клина в свою очередь равен $\Delta V = a \cdot S_{ABC}$. Если угол $\angle BCA$ — малый, то $BC \approx AC$, а площадь треугольника ABC приближённо равна площади треугольника DBC: $S_{ABC} \approx S_{DBC}$. Для вычисления этой площади можно использовать приближённую формулу, данную в условии, следует только учесть, что при изменении линейных размеров в n раз площади изменяются в n^2 раз.



Теперь, используя соображения, изложенные выше, ответим на вопросы задачи.

1) В данном случае даже за 10 секунд объём изменяется на маленькую величину, поэтому справедливо всё вышесказанное. Изменение объёма за первые 10 секунд равно

$$\Delta V = S \cdot a = \frac{\pi\alpha}{360^\circ} \cdot a^2 \cdot a \approx \frac{\pi}{360} \cdot a^3 = 5{,}6 \cdot 10^{-4}\ \text{м}^3.$$

Чтобы найти массу, следует умножить найденный объём на плотность. В результате получим значение массы $m_0 \approx 560$ г.

2) В произвольном случае для изменения объёма имеем формулу

$$\Delta V = a \cdot (BC)^2 \cdot \frac{\pi\gamma}{360^\circ}, \qquad (1)$$

где γ — малый угол $\angle BCD$. Из полученной формулы следует, что наибольшему изменению объёма (при повороте на одинаковый малый угол) соответствует треугольник с наибольшей длиной гипотенузы BC. Очевидно, что наибольшая длина гипотенузы достигается, когда основание куба составляет угол 45° с горизонтальной поверхностью стола.

3) Когда аквариум наклоняют на угол 45° длина стороны BC, как следует из теоремы Пифагора, становится равна $a\sqrt{2}$. Очевидно, что для расчёта изменения объёма за малое время можно использовать формулу (1). Для определения расхода сначала найдём скорость изменения объёма

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = a \cdot 2a^2 \cdot \frac{\pi\gamma}{360^\circ \cdot \Delta t}. \qquad (2)$$

Если в соотношение (2) подставить значения $\gamma = 1^\circ$ и $\Delta t = 10$ с, можно найти значение скорости изменения объёма и далее, умножив на плотность, определить максимальный расход. После вычислений получим ответ: $Q_{\max} \approx 112$ г/с.

Ответ: 1) $m_0 \approx 560$ г; 2) $\varphi = 45^\circ$;
3) $Q_{\max} \approx 112$ г/с.

Список литературы

[1] Industry Direct. SANY Reach Stacker [Электронный ресурс]. — 2019. — Режим доступа: https://pdf.directindustry.com/pdf/sany/sany-srsc45c2-reach-stacker/52887-676393.html (дата обращения: 2020-02-14).

[2] Trassinelli Martino. Energy cost and optimisation in breath-hold diving // Journal of Theoretical Biology. — 2015. — 03. — Vol. 396.

[3] Trassinelli Martino. Energy cost and optimisation in breath-hold diving [Электронный ресурс]. — 2018. — Режим доступа: https://arxiv.org/pdf/1503.02904.pdf (дата обращения: 2020-02-17).