Условия задач, авторские решения, критерии оценивания

1. «Минимальная средняя скорость» (8 баллов), Ромашка М. Ю.

Между городами A и B действует автобусный маршрут, длина которого $S = 180$ км. Движение автобуса по этому маршруту не равномерное: из-за различных дорожных условий скорость автобуса часто меняется. В момент отправления пассажир Петров засекает на своих часах время и каждые 10 минут вычисляет среднюю скорость автобуса за эти 10 минут. Для этого он узнаёт путь, пройденный автобусом, с помощью GPS-навигатора. Автобус доехал из A до B за 3 часа. За это время Петров получил 18 значений средней скорости: v_1, v_2, v_3, $\ldots$, v_{18}.

1) Известно, что ни одно из значений $v_1, v_2, \ldots, v_{18}$ не превышает 63 км/ч. Чему может быть равно наименьшее из этих значений (в каких пределах оно может лежать)?

2) Ответьте на вопрос п. 1), если ни одно из измеренных значений средней скорости $v_1, v_2, \ldots, v_{18}$ не превышает 64 км/ч.

Решение

1) Наименьшее значение средней скорости на одном из отрезков времени достигается в том случае, когда на всех остальных отрезках значение средней скорости максимально. Если ширина временного интервала равна $\Delta t = 10$ мин, максимальная средняя скорость равна $v_{\max}$, минимальная средняя скорость равна $v_{\min}$, то справедливо равенство

$$S = (17v_{\max} + v_{\min})\Delta t. \qquad (1)$$

Очевидно, что максимальное значение средней скорости на интервале равно $v_{\max} = 63$ км/ч. Минимальное значение может быть найдено из уравнения (1). Решив уравнение, получим $v_{\min} = 9$ км/ч. Таким образом, наименьшее из значений средних скоростей не может быть менее 9 км/ч. С другой стороны, наименьшее из этих значений не может быть больше, чем

$$\frac{180\ \text{км}}{3\ \text{ч}} = 60\ \text{км/ч}.$$

2) Решим уравнение (1), положив $v_{\max} = 64$ км/ч. Получим $v_{\min} = -8$ км/ч. Это означает, что наименьшее из значений средней скорости на одном из интервалов могло быть равно 0. И также, как в первом случае, наименьшее из значений средних скоростей не может превышать 60 км/ч.

Ответ: 1) 9 км/ч $< v <$ 60 км/ч; 2) 0 км/ч $< v <$ 60 км/ч.

Распределение баллов и рекомендации по оценке решений

1) Получен верный ответ на первый вопрос, при этом указывается нижняя граница диапазона значений 9 км/ч и верхняя граница 60 км/ч, даются непротиворечивые, доказательные объяснения — **4 балла**.

Если никаких объяснений не даётся при правильном ответе — **2 балла**.

Если верхняя граница диапазона не указана, но верно найдена нижняя — **3 балла**.

Если рассуждения и формулы верные, а численные расчёты неправильные — **2 балла**.

2) Получен верный ответ на второй вопрос, при этом указывается нижняя граница диапазона значений 0 км/ч и верхняя граница 60 км/ч, даются непротиворечивые, доказательные объяснения — **4 балла**.

Если никаких объяснений не даётся при правильном ответе — **2 балла**.

Если верхняя граница диапазона не указана, но верно найдена нижняя — **3 балла**.

Если рассуждения и формулы верные, а численные расчёты неправильные — **2 балла**.

2. **Таяние снега** (10 баллов), Трушников Н. Д.

Снежный покров состоит из верхнего слоя свежевыпавшего снега толщиной $H_1 = 20$ см и нижнего слоя старого слежавшегося снега толщиной $H_2 = 10$ см. В две одинаковые цилиндрические мензурки с внутренним диаметром $d_0 = 5$ см и высотой $h_0 = 7$ см были помещены образцы снега из каждого слоя, при этом снег в каждую мензурку засыпался доверху, но не утрамбовывался, снег из разных слоёв набирался в разные мензурки. После этого мензурки размещали на столе в отапливаемом помещении. На рис. 1 приведена фотография, полученная в процессе эксперимента. Наблюдения показывают, что с течением времени снежный цилиндр уменьшается в размерах, но сохраняет свою форму. Высота нижней тёмной части снежного цилиндра со временем растёт. Слой воды заметной толщины появляется на дне мензурки после того, как весь снег становится тёмным. В мензурке со свежим снегом к моменту появления воды на дне диаметр цилиндра из снега оказывается равен $d_1 = 3$ см, а высота — $h_1 = 4$ см. На дне мензурки со слежавшимся снегом вода появляется, когда диаметр цилиндра из снега становится равен $d_2 = 4$ см, а высота — $h_2 = 5$ см.

Рис. 1

Можно считать, что снег состоит из кристалликов льда и пустот между ними, внутренняя структура снега при таянии не меняется. Пористостью снега α называют отношение объема пустот ко всему объему снега: $\alpha = \dfrac{V_п}{V_0}$.

1) Определите пористости свежего и слежавшегося снега, считая что снег тает только на внешней поверхности цилиндров.

2) На улице резко потеплело. Снег стал таять. Оцените высоту снежного покрова в тот момент, когда из под него потекут ручьи. Можно считать, что таяние происходит при условиях, похожих на условия из п. 1), но снег тает только на верхней поверхности слоя.

Плотность льда равна $\rho_л = 900$ кг/м^3, плотность воды равна $\rho_в = 1000$ кг/м^3.

Решение

Вода начинает появляться на дне мензурки, после того, как она заполнит все пустоты в снеге за счет капиллярных эффектов. Таким образом, для объема, занимаемого снегом и водой в момент появления воды на дне сосуда, можно записать равенство

$$V_1 = V_{\text{нераст.сн.}} + V_{\text{воды}},$$

из которого следует уравнение для определения α_1

$$\frac{\pi d_1^2}{4}h_1 = \frac{\rho_л}{\rho_в}\cdot(1-\alpha_1)\left(\frac{\pi d_0^2}{4}h_0 - \frac{\pi d_1^2}{4}h_1\right) + (1-\alpha_1)\frac{\pi d_1^2}{4}h_1. \qquad (2)$$

Решая уравнение (2), получим пористость свежего снега

$$\alpha_1 = \frac{\rho_л(d_0^2h_0 - d_1^2h_1)}{(\rho_в-\rho_л)d_1^2h_1 + \rho_л\cdot d_0^2h_0} \approx 0{,}78.$$

Аналогичным образом рассчитывается пористость слежавшегося снега

$$\alpha_2 = \frac{\rho_л(d_0^2h_0 - d_2^2h_2)}{(\rho_в-\rho_л)d_2^2h_2 + \rho_л\cdot d_0^2h_0} \approx 0{,}52.$$

Для оценки толщины снежного покрова к моменту появления воды под слоями снега предположим, что весь свежий снег растаял и рассчитаем отношение получившегося объёма воды и объёма пустот в слое слежавшегося снега:

$$\frac{V_{\text{воды}}}{V_{\text{пустот}}} = \frac{\frac{\rho_{\text{л}}}{\rho_{\text{в}}}(1-\alpha_1)H_1S}{\alpha_2H_2S} = 0{,}76.$$

Получается значение меньше 1, следовательно к моменту появления воды весь слой свежевыпавшего снега растает, а также растает часть слоя слежавшегося снега высотой x. Значение x можно найти из уравнения

$$\frac{\rho_{\text{л}}}{\rho_{\text{в}}}(1-\alpha_1)H_1S + \frac{\rho_{\text{л}}}{\rho_{\text{в}}}(1-\alpha_2)xS = \alpha_2(H_2-x)S.$$

Получится формула

$$x = \frac{\rho_{\text{в}}\alpha_2H_2 - \rho_{\text{л}}(1-\alpha_1)H_1}{\rho_{\text{л}}(1-\alpha_2)+\rho_{\text{в}}\alpha_2} \approx 1{,}3 \text{ см},$$

из которой следует ответ: $H_{\text{нераст.сн.}} = H_2 - x \approx 8{,}7$ см

Ответ: 1) $\alpha_1 = \dfrac{\rho_{\text{л}}(d_0^2h_0 - d_1^2h_1)}{(\rho_{\text{в}}-\rho_{\text{л}})d_1^2h_1 + \rho_{\text{л}}\cdot d_0^2h_0} \approx 0{,}78$, $\alpha_2 = \dfrac{\rho_{\text{л}}(d_0^2h_0 - d_2^2h_2)}{(\rho_{\text{в}}-\rho_{\text{л}})d_2^2h_2 + \rho_{\text{л}}\cdot d_0^2h_0} \approx 0{,}52$.

2) $H_{\text{нераст.сн.}} = H_2 - \dfrac{\rho_{\text{в}}\alpha_2H_2 - \rho_{\text{л}}(1-\alpha_1)H_1}{\rho_{\text{л}}(1-\alpha_2)+\rho_{\text{в}}\alpha_2} \approx 8{,}7$ см.

Распределение баллов и рекомендации по оценке решений

1) Отмечено, что вода заполняет все полости в снеге до того, как она появляется на дне сосуда — **1 балл**.

2) Выражен объем нерастаявшего снега к моменту появления воды на дне сосуда —**1 балл**.

3) Выражен объем растаявшего снега в полостях к моменту появления воды на дне сосуда — **1 балл**.

4) Рассчитаны пористости — **1 балл + 1 балл**.

5) Численно доказано предположение о таянии всего верхнего слоя в слое снега при потеплении — **1 балл**.

6) Выражен объем растаявшего снега в пробе снежного покрова — **1 балл**.

7) Выражен объем нерастаявшего снега в пробе снежного покрова — **1 балл**.

8) Определена искомая высота — **2 балла**.

3. Самодельный ареометр (10 баллов), Ромашка М. Ю.

Ареометр — прибор для измерения плотности жидкостей, принцип работы которого основан на законе Архимеда. Обычно он представляет собой трубку, в нижней части которой помещён груз (см. рис. 2). Верхняя часть ареометра — цилиндр, на который нанесена шкала, проградуированная в значениях плотности. Считается, что ареометр изобрела Гипатия Александрийская — знаменитая женщина-учёный древности. Рассмотрим конструкцию самодельного ареометра для измерения плотности молока (лактометра). Плотность молока варьируется в пределах от минимального значения $\rho_1 = 1015$ кг/м^3 до максимального $\rho_2 = 1040$ кг/м^3. Разность максимального и минимального значения много меньше среднего значения, благодаря чему шкала такого лактометра линейна. Для изготовления лактометра взяли твёрдую цилиндрическую пластиковую трубку с внешним диаметром $d = 16$ мм, внутрь которой снизу поместили груз и закрыли нижний конец заглушкой. Снаружи вся конструкция выглядит как цилиндр, а её общая масса равна $m = 40$ г. На расстоянии $h_0 = 20$ см от нижнего конца трубки нанесли первое деление, которое соответствовало некоторой плотности ρ_0, немного меньшей ρ_1. Вниз от первого деления стали наносить другие деления, расстояние между которыми было равно $\Delta h = 1$ мм.

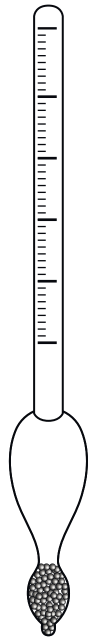

Рис. 2

1) Чему равна цена деления $\Delta\rho$ такого прибора?

2) Чему равна плотность ρ_0, соответствующая первому делению?

3) Какое минимальное число N делений нужно нанести, чтобы измерять плотность молока во всём диапазоне значений от ρ_0 до ρ_2?

Решение

Рассмотрим положение равновесия ареометра, когда он частично погружен в жидкость с некоторой плотностью ρ, и при этом глубина погружения равна h. Объём погружённой части цилиндра равен

$$V = Sh = \frac{\pi d^2}{4}h. \tag{1}$$

Сила тяжести, действующая на весь прибор, уравновешивается силой Архимеда:

$$mg = \rho g V. \tag{2}$$

С учётом равенства (1) из уравнения (2) можно получить выражение для плотности жидкости

$$\rho = \frac{4m}{\pi d^2 h}. \tag{3}$$

Покажем, что при малых изменениях плотности жидкости шкала этого прибора линейна. Пусть

$$h = h_0 - \Delta h, \tag{4}$$

где Δh — отсчитанное вниз от первого деления расстояние, которое соответствует отметке на шкале при погружении в жидкость с плотностью $\rho > \rho_0$. Подставим соотношение (4) в (3) и преобразуем полученное выражение

$$\rho = \frac{4m}{\pi d^2(h_0 - \Delta h)} = \frac{4m(h_0 + \Delta h)}{\pi d^2(h_0^2 - (\Delta h)^2)} \approx \frac{4m(h_0 + \Delta h)}{\pi d^2 h_0^2}. \tag{5}$$

В приближённом равенстве мы учли, что $(\Delta h)^2 \ll h_0^2$ (если разность между максимальной и минимальной плотностями много меньше среднего значения, то справедливо неравенство $\Delta h \ll h_0$, а для квадратов этих величин неравенство «ещё более сильное»). Применяя формулу (5) для двух соседних делений шкалы и вычитая одно равенство из другого, получим

$$\Delta\rho \approx \frac{4m\Delta h}{\pi d^2 h_0^2} = 5 \text{ кг/м}^3. \tag{6}$$

С другой стороны, масса всего прибора равна массе вытесненной им жидкости. Поэтому для плотности ρ_0 и глубины погружения h_0 имеем соотношение

$$\rho_0 = \frac{4m}{\pi d^2 h_0} = 1000 \text{ кг/м}^3. \tag{7}$$

Тогда минимальное число делений, которое необходимо, чтобы измерять плотности от ρ_0 до ρ_2 включительно, равно

$$N = \frac{\rho_2 - \rho_0}{\Delta\rho} + 1 \approx 10.$$

Ответ: 1) $\Delta\rho \approx \dfrac{4m\Delta h}{\pi d^2 h_0^2} = 5$ кг/м^3; 2) $\rho_0 = \dfrac{4m}{\pi d^2 h_0} = 1000$ кг/м^3; 3) $N = \dfrac{\rho_2 - \rho_0}{\Delta\rho} + 1 \approx 10$.

Распределение баллов и рекомендации по оценке решений

Внимание!!! В данной задаче в процессе оформления билета с заданиями произошла техническая ошибка (опечатка). Вместо значения $d = 16$ мм, в билете было написано $d = 14$ мм. Это приводит к тому, что второй и третий вопросы задачи становятся некорректными (ρ_0 в процессе решения оказывается большей, чем ρ_2). В связи с этим, методическая комиссия олимпиады приняла решение ставить полный балл за задачу, если найдено решение на вопрос из п. 1). Жюри и оргкомитет олимпиады приносит свои искренние извинения участникам олимпиады и автору данной задачи!

1) Имеется идея о том, что сила тяжести уравновешена силой Архимеда, и записаны выражения для силы тяжести и силы Архимеда — **1 балл**.

2) Имеется связь между объёмом V погружённой части цилиндра и высотой h погружённой части (в любом виде, не обязательно в виде отдельной формулы) — **1 балл**.

3) Получено любым способом уравнение $\rho = \dfrac{4m}{\pi d^2 h}$ или любое равносильное ему уравнение, связывающее плотность жидкости и глубину погружения цилиндра — **3 балла**.

4) Показано любым способом, что при узком диапазоне измеряемых плотностей шкала прибора линейна — **1 балл**.

5) Получена правильная формула для цены деления $\Delta\rho = \dfrac{4m\Delta h}{\pi d^2 h_0^2}$ — **3 балла**.

Если получена формула $\Delta\rho = \dfrac{4m\Delta h}{\pi d^2 h_0^2}$ и верно вычислено значение для $d = 14$ мм, равное $6{,}5 \pm 0{,}2$ кг/м^3 — **4 балла**.

Примечание: если получен ответ на первый вопрос задачи без обоснования линейности зависимости, а линейность шкалы используется как данность, то оценка снижается на 1 балл (все остальные пункты оцениваются независимо).

4. Печка в Солнце (12 баллов), Варламов С. Д.

Вблизи центра Солнца каждая тонна находящегося там звёздного вещества производит 1 Дж энергии каждую секунду за счет идущих там термоядерных реакций. Вся эта энергия, «добравшись» до поверхности Солнца, излучается Солнцем во все стороны равномерно. На Земле на участок площадью 1 м^2, расположенный перпендикулярно солнечным лучам, за каждую секунду попадает солнечная энергия равная 1370 Дж (эта величина называется солнечной постоянной). Расстояние от Земли до Солнца равно 150 миллионов км, плотность вещества в центре Солнца равна 160 г/см^3, радиус Солнца — 655 тыс. км. Используя эти сведения, оцените радиус области внутри Солнца, в которой идут термоядерные реакции, и сравните его с радиусом Солнца.

Для справки: площадь поверхности шара радиусом R равна $S = 4\pi R^2$, а объём шара радиусом R равен $V = \dfrac{4\pi R^3}{3}$.

Решение

Сначала введем буквенные обозначения. Солнечная постоянная — $E = 1370$ Вт/м^2, расстояние от Солнца до Земли — $L = 1{,}5 \cdot 10^{11}$ м, радиус Солнца — R, радиус области, в которой вблизи центра Солнца идут термоядерные реакции, — r. Считаем, что в этой области плотность вещества одинаковая (то есть равна 160 г/см^3 = 160 тонн/м^3). Следовательно, в каждом кубометре объема производится тепловая мощность $\dfrac{W}{V} = \lambda = 160$ Вт/м^3. Распределение температур в Солнце давным-давно установилось, поэтому, сколько производится энергии за какой-то промежуток времени, ровно столько же энергии за такое же время покидает Солнце, то есть излучается по всем направлениям равномерно. Уравнение баланса энергии таково:

$$\frac{4\pi R^3}{3} \cdot \lambda = 4\pi L^2 \cdot E.$$

Следовательно, радиус области, в которой происходят термоядерные реакции, равен примерно

$$r = \left(\frac{3L^2E}{\lambda}\right)^{1/3} \approx 83{,}3 \cdot 10^3 \text{ км}.$$

Отношение радиуса этой области к радиусу Солнца равно: $\dfrac{r}{R} = 0{,}127$.

<u>Ответ</u>: $\dfrac{r}{R} = 0{,}127$.

Распределение баллов и рекомендации по оценке решений

За полное решение, содержащее правильные соотношения в общем виде, ставится полный балл! Многие участники 8 класса во время тура имели калькуляторы, не оснащенные функцией извлечения кубического корня числа. При проверке стоит учитывать данный факт.

1) В процессе решения делались правильные переводы единиц измерения физических величин — **1 балл**.

2) Написано выражение в общем виде ($\lambda = \frac{W}{V}$) или найдено числовое значение (160 Вт/м^3) для плотности тепловой мощности, производимой веществом вблизи центра Солнца — **2 балла**.

3) Написано уравнение

$$\frac{4\pi R^3}{3}\lambda = 4\pi L^2 \cdot E,$$

описывающее тепловой баланс (сколько производится энергии за какой-то промежуток времени, ровно столько же энергии за такое же время покидает Солнце; E — солнечная постоянная) — **7 баллов**.

4) Написано выражение (или аналогичное ему)

$$r = \left(\frac{3L^2E}{\lambda}\right)^{\frac{1}{3}}$$

Для радиуса области, в которой происходят термоядерные реакции или найдено числовое значение – **2 балла**.