81-я Московская олимпиада школьников по физике
2020 год
7 класс

Условия задач, ответы и авторские решения

1. Про зайчика (8 баллов)

Крюков П. А.

Геша измерял плотность маленького стеклянного зайчика. Он налил воду в мензурку с ценой деления 2 мл, при этом столб воды доходил до отметки 170 мл. После того, как Геша полностью погрузил зайчика на ниточке в воду, уровень воды поднялся до 180 мл. Далее Геша решил взвесить зайчика на школьных рычажных весах для лабораторных работ. Но гири у него были только массой 2 г. Получилось, что 12 гирь мало, чтобы уравновесить зайчика, а 13 — много. Не долго думая, Геша вычислил плотность зайчика:

$$\rho = \frac{25\text{ г}}{180\text{ мл} - 170\text{ мл}} = 2500\text{ кг/м}^3.$$

Пришёл Лёлик, назвал Гешу неумным человеком и сказал, что на самом деле значение плотности зайчика может сильно отличаться от значения, вычисленного Гешей. Известно, что Лёлик оценивает погрешность измерения объёма мензуркой в половину цены деления. Чему может быть равна плотность зайчика?

Решение

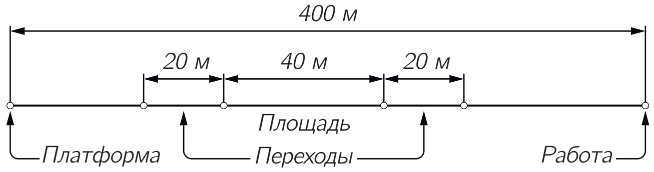
На основе данных Геши можно получить только интервал возможных значений плотности. Для нахождения нижней границы интервала следует разделить наименьшее из возможных значений массы (24 г) на наибольшее возможное значение объёма (12 мл), получится $\rho_{\min} = 2000\text{ кг/м}^3$. Чтобы найти верхнюю границу, следует наоборот разделить наибольшее возможное значение массы (26 г) на наименьшее значение объёма (8 мл). Получится $\rho_{\max} = 3250\text{ кг/м}^3$.

Ответ: $2000\text{ кг/м}^3 < \rho < 3250\text{ кг/м}^3$.

2. Переходы (10 баллов)

Крюков П. А.

Дядя Вова живёт в области, а работает в Москве, до которой едет на электричке. Путь от железнодорожной платформы до места работы составляет 400 метров. На этом пути дядя Вова преодолевает два пешеходных перехода длиной 20 метров, которые разделяет сорокаметровая маленькая площадь. Светофор на каждом переходе включает зелёный сигнал на 25 секунд, а красный — на две минуты. Дядя Вова ходит не спеша, со скоростью не более 1 м/с. Обозначим t_1 — минимальное время, за которое дядя Вова может дойти от вокзала до работы, а t_2 — минимальное время на обратную дорогу.



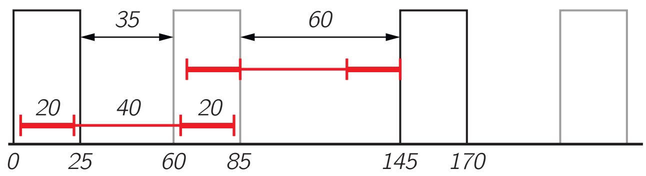
Интервал времени между включением зелёного сигнала на первом светофоре на пути от вокзала и включением зелёного сигнала на втором обозначим T. Дядя Вова соблюдает правила, поэтому он выходит на «зебру» перехода только в том случае, если до окончания зелёного сигнала светофора остаётся 20 секунд и более. В противном случае он дорогу не переходит.

1) Пусть время T равно 60 с. Найдите время t_1 и t_2.

2) Чему равно время T, если $t_1 = t_2$?

Решение

1) Задачу удобно анализировать, нарисовав рисунок, подобный приведённому ниже. Чёрные прямоугольные «импульсы» обозначают включение первого (по дороге от платформы до работы) светофора, а серые — включение второго. Цифры — время в секундах. Красный отрезок с двумя утолщениями на краях символизирует движение без промежуточных остановок при переходах. Если участки шириной 20 с помещаются целиком внутри соседних «импульсов» — можно перейти без промежуточных остановок. В противном случае — нельзя



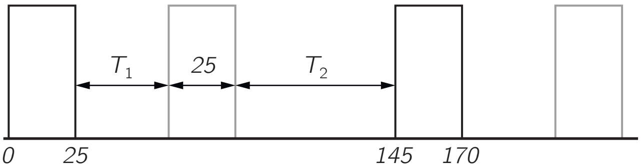
Между включением зелёного сигнала на ближнем к платформе светофоре и включением зелёного сигнала на дальнем проходит 60 с. Между тем, на преодоление ближнего перехода и маленькой площади дядя Вова тратит те же 60 с. Следовательно, дядя Вова может преодолеть оба пешеходных перехода без промежуточных остановок. Левый красный отрезок с делениями на схеме иллюстрирует такую возможность.

Если дядя Вова начинает первый переход в первые пять секунд работы ближнего светофора, то гарантировано закончит второй переход до того момента, когда зелёный сигнал дальнего светофора погаснет. Очевидно, что на обратной дороге преодолеть два перехода без промежуточной остановки не получится. Невозможно так разместить красный отрезок с делениями, чтобы левая часть попадала в «импульс» серого цвета, а правая — в «импульс» чёрного. Между выключением зелёного сигнала на дальнем (от платформы) светофоре и включением зелёного сигнала на ближнем проходит 60 с, поэтому какое-то время придётся ждать, пока включится зелёный сигнал на ближнем светофоре. Минимальное время ожидания, как легко видеть, равно $60\text{ с} - 40\text{ с} = 20\text{ с}$. Для того, чтобы потерять на промежуточной остановке 20 с, следует начать второй переход, изображаемый серым «импульсом», на пределе, когда до его окончания остаётся 20 с.

Таким образом, в одну сторону можно перейти без задержек, а в другую с минимальной задержкой в 20 с, что даёт ответы на первый вопрос: 400 с и 420 с.

2) Имеет смысл сначала сделать предварительный анализ. На первый взгляд, есть три возможности, при которых минимальное время движения в одну сторону и в другую будет одинаковым: 1) оба перехода преодолеваются с задержками при движении на работу и обратно; 2) оба перехода преодолеваются без задержек туда и обратно; 3) на одном из переходов приходится ждать.

Очевидно, что случай, когда приходится ждать на каждом переходе никогда не реализуется, потому что хотя бы один переход всегда можно преодолеть без задержек.



Покажем, что случай, когда оба перехода преодолеваются без задержек и в одну и в другую сторону — невозможен. Обозначим время между серым «импульсом» и чёрным T_1, а время между чёрным и серым T_2 (см. рис. ниже). Для того, чтобы переходить без задержек необходимо, чтобы каждое время удовлетворяло неравенству $30 \le T_i \le 40$. Отсюда следует, что сумма времён T_1 и T_2 должна удовлетворять неравенству

$$60 \le T_1 + T_2 \le 80. \qquad (1)$$

С другой стороны, должно выполняться равенство

$$T_1 + T_2 + 25 = 120. \qquad (2)$$

Одновременное выполнение равенства (2) и неравенства (1) невозможно. Поэтому перейти без задержек и в одну и в другую сторону никак не получится.

Минимальное время при движении от платформы до места работы может быть равно минимальному времени, затрачиваемому на обратную дорогу, только если в обоих случаях один переход преодолевается без задержки, а другой — с задержкой. При этом задержка при движении в одну сторону должна быть равна задержке при движении в другую. Это условие выполняется в двух случаях: либо серые «импульсы» накладываются на чёрные, либо времена T_1 и T_2 равны. В первом случае получим $T = 0$. Во втором случае из уравнения (2) следует равенство $T_1 = T_2 = 47{,}5$ с, из которого легко получаем второй ответ: $T = 72{,}5$ с.

Ответ: 1) $t_1 = 400$ с и $t_2 = 420$ с; 2) $T = 0$, $T = 72{,}5$ с.

3. Фонтан Герона (10 баллов)

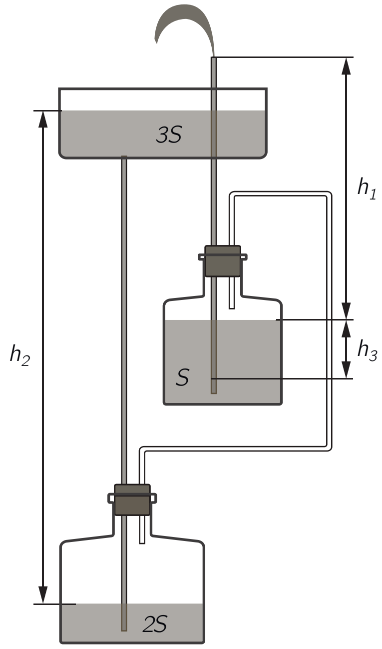
Бычков А. И.

На рисунке ниже изображена схема «Фонтана Герона». Три сосуда с вертикальными стенками, площади оснований которых указаны на рисунке ($S = 100$ см^2), соединены системой трубок с площадью сечения $S_1 = 10$ мм^2.

Суммарный объём воздуха в нижних сосудах остаётся при работе фонтана постоянным. Вся вода, выходящая из верхней трубки и образующая фонтан, в итоге оказывается в верхнем сосуде. Квадрат скорости воды v на выходе из трубки определяется выражением

$$v^2 = \alpha(h_2 - h_1),$$

где α — неизвестный коэффициент пропорциональности, расстояния h_1 и h_2 показаны на рисунке. В процессе работы фонтана расстояния h_1, h_2 и h_3 меняются.



1) Как изменяется уровень воды в верхнем сосуде в процессе работы фонтана?

В некоторый момент времени указанные на рисунке расстояния равны: $h_1 = 35$ см, $h_2 = = 60$ см, а скорость воды, бьющей из трубочки, равна $v = 2{,}0$ м/с.

2) Найдите скорости изменения уровней воды в нижних сосудах в этот момент времени.

3) По истечении некоторого времени уровень воды в среднем сосуде опустится на величину $h_3 = 6$ см, при этом нижний сосуд еще не заполнится. Чему равна в этот момент скорость воды на выходе из трубки?

Решение

1) Поскольку суммарный объём воздуха в нижнем и среднем сосудах не меняется, суммарный объём воды в этих сосудах тоже не должен меняться. Отсюда следует, что уровень воды в верхнем сосуде также не меняется.

2) Из первого вопроса следует, что изменение объёма воды в среднем сосуде должно быть равно (по модулю) изменению объёма воды в нижнем сосуде. Величины, относящиеся к нижнему сосуду, будем помечать индексом 2, а относящиеся к верхнему, — индексом 1. Из приведённого выше рассуждения следуют равенства:

$$u_2 \cdot 2S = u_1 \cdot S, \Rightarrow \quad 2u_2 = u_1. \qquad (1)$$

С другой стороны, выполняется очевидное равенство

$$u_1 \cdot S = v \cdot S_1. \qquad (2)$$

Из уравнений (1) и (2) получаем ответы: $u_1 = 2$ мм/с, $u_2 = 1$ мм/с.

3) Когда уровень воды в среднем сосуде опустится на 6 см, уровень воды в нижнем сосуде поднимется на 3 см (поскольку площадь основания нижнего сосуда в два раза больше). Таким образом, разность расстояний $\Delta h = h_2 - h_1$ уменьшится на 9 см. Поскольку в начальный момент эта разность была равна $\Delta h_{\text{нач.}} = 25$ см, после изменения уровней воды она станет равна

$\Delta h_{\text{кон.}} = 16$ см. Из формулы, приведённой в условии, следует, что отношение квадратов скоростей равно отношению соответствующих разностей:

$$\frac{v^2_{\text{кон.}}}{v^2_{\text{нач.}}} = \frac{\Delta h_{\text{кон.}}}{\Delta h_{\text{нач.}}}.$$

Из последней формулы и условия следует ответ:

$$v_{\text{кон.}} = v_{\text{нач.}} \cdot \frac{4}{5} = 1{,}6 \text{ м/с}.$$

Ответ: 1) Уровень не изменяется; 2) 2 мм/с, 1 мм/с; 3) 1,6 м/с.

4. Мокрый песок (12 баллов)

Черников Ю. А., Крюков П. А.

Строительный песок часто добывается со дна рек или карьеров. Такой песок содержит воду, что количественно характеризует *влажность* песка, равная

$$\varphi = \frac{m_{\text{вод}}}{m_{\text{п}}}.$$

$m_{\text{вод}}$ — масса воды (в мокром песке), $m_{\text{п}}$ — масса песка без воды. Объём влажного песка $V_{\text{вл}}$ сильно зависит от его влажности. Обозначим

$$\alpha = \frac{V_{\text{вл}} - V_{\text{сух}}}{V_{\text{сух}}},$$

относительное изменение объёма песка при его увлажнении. Приближённый график зависимости $\alpha(\varphi)$ приведён на рисунке. Значения влажности песка и относительного изменения объёма выражены в процентах.

1) Определите значение влажности, при которой плотность влажного песка равна плотности сухого.

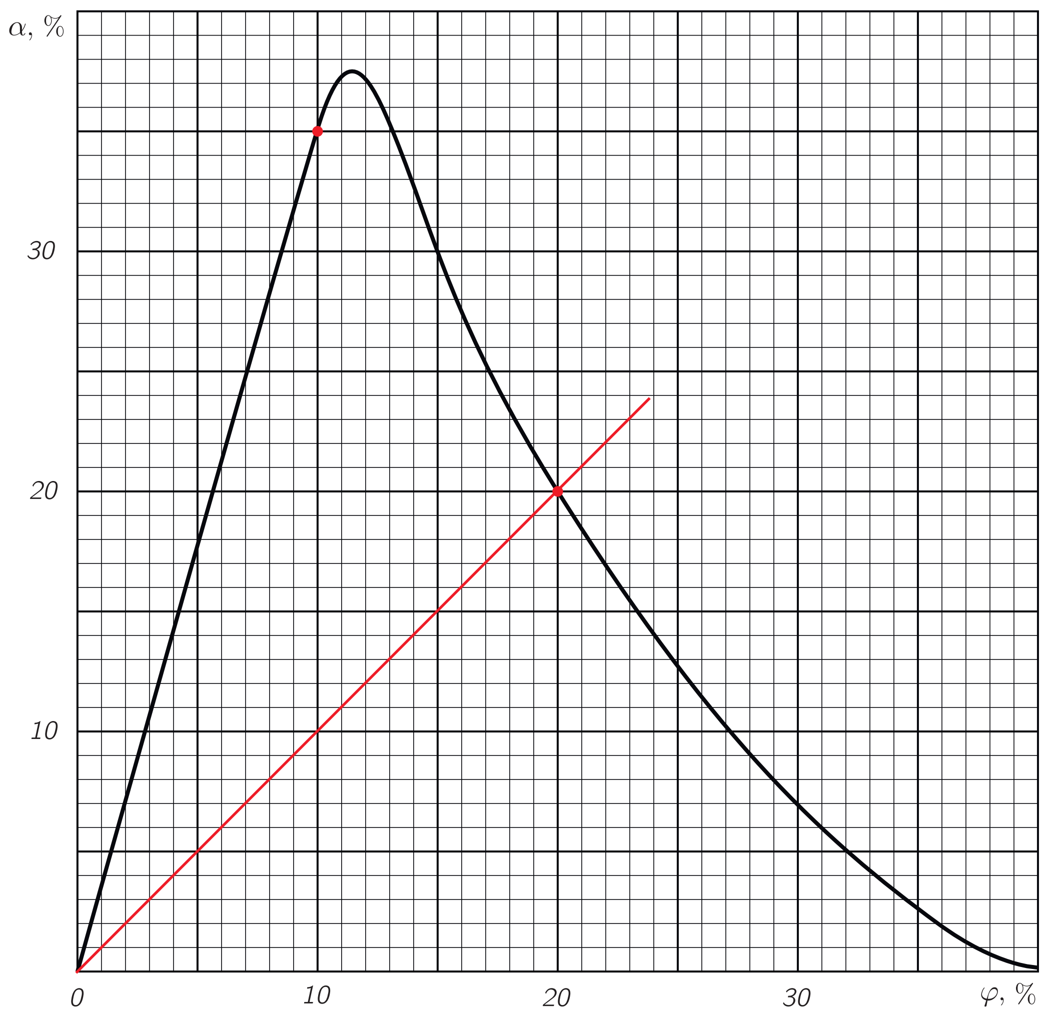
2) Объём порции влажного песка складывается из объёма песчинок, объёма воды и объёма воздушных полостей:

$$V_{\text{вл}} = V_{\text{п}} + V_{\text{вод}} + V_{\text{возд}}.$$

Когда небольшое количество воды попадает в песок вода обволакивает песчинки за счёт капиллярных сил и отдаляет их друг от друга. Предположим, что объем воды в песке и объём воздушных полостей связаны соотношением

$$V_{\text{возд}} = k \cdot V_{\text{вод}} + V^{(0)}_{\text{возд}},$$

$V^{(0)}_{\text{возд}}$ — объём воздушных полостей при нулевой влажности. Можно ли считать коэффициент пропорциональности k постоянным на всем возрастающем прямолинейном участке графика? Найдите значение коэффициента k в середине этого участка графика. Известно, что плотность сухого песка $\rho_{\text{сух}}$ в 1,6 раз больше плотности воды $\rho_{\text{вод}}$.



Решение

1) Относительное изменение объёма песка α может быть представлено в виде

$$\alpha = \frac{V_{\text{вл}}}{V_{\text{сух}}} - 1 = \frac{(m_{\text{п}} + m_{\text{вод}}) \cdot \rho_{\text{сух}}}{m_{\text{п}} \cdot \rho_{\text{вл}}} - 1, \qquad (1)$$

где $\rho_{\text{сух}}$ и $\rho_{\text{вл}}$ — плотности сухого и влажного песка. Подставим в формулу (1) выражение $m_{\text{вод}} = \varphi m_{\text{п}}$, получим соотношение

$$\alpha = (1+\varphi)\frac{\rho_{\text{сух}}}{\rho_{\text{вл}}} - 1,$$

которое в случае равенства плотностей сухого и влажного песка превращается в равенство $\alpha = \varphi$, задающее прямую в координатах $(\varphi; \alpha)$. Очевидно искомое значение влажности лежит на пересечении графика влажности, данного в задаче и прямой $\alpha = \varphi$. Из рисунка следует ответ: искомая влажность равна $20\,\%$.

2) Легко видеть, что прямолинейный возрастающий участок графика задаётся уравнением $\alpha = A\varphi$, где коэффициент пропорциональности равен $A = 3{,}5$. Из определения, данного в условии задачи, можно получить для относительного изменения объёма соотношение

$$\alpha = (k+1)\frac{V_{\text{вод}}}{V_{\text{п}} + V^{(0)}_{\text{возд}}}. \qquad (2)$$

Числитель и знаменатель дроби из формулы (2) можно выразить через плотность воды и плотность сухого песка, а далее использовать определение влажности из условия. В итоге получится уравнение

$$\alpha = \varphi(k+1)\frac{\rho_{\text{сух}}}{\rho_{\text{вод}}} = \varphi(k+1) \cdot \frac{8}{5}. \qquad (3)$$

Напомним, что на прямолинейном участке $\alpha = 3{,}5\varphi$, поэтому из формулы (3) следует, что коэффициент k на прямолинейном участке будет постоянным. Он равен

$$k = 3{,}5 \cdot \frac{5}{8} - 1 = 1,1875 \approx 1{,}19.$$

Ответ: 1) $20\,\%$; 2) $k \approx 1{,}19$.