Диэлектрики

Векторы индукции и поляризации

Для описания электрического поля в материальной среде вводятся векторы $\mathbf{D}$ и $\mathbf{P}$, удовлетворяющие соотношению (в системе СИ)

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P},$$

где $\mathbf{P} = \frac{d\mathbf{p}}{dV}$ — вектор поляризации, равный дипольному моменту единицы объёма диэлектрика; $\mathbf{D}$ — вектор электрической индукции, характеризующий поле свободных зарядов, и удовлетворяющий теореме Гаусса в интегральной или дифференциальной форме

$$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int \rho_{\text{своб}}\, dV, \qquad \operatorname{div} \mathbf{D} = \rho_{\text{своб}}.$$

В линейных средах при не очень больших значениях напряжённости поля справедливы соотношения

$$\mathbf{D} = \varepsilon\varepsilon_0 \mathbf{E}, \qquad \mathbf{P} = (\varepsilon - 1)\varepsilon_0 \mathbf{E},$$

где постоянная ε — диэлектрическая проницаемость среды.

1. В бесконечной среде с диэлектрической проницаемостью ε находится точечный заряд q. Найдите электрическую индукцию D, напряжённость поля E и его потенциал φ, а также поляризованность P в точке на расстоянии r от заряда. С какой силой взаимодействуют точечные заряды q и Q, расположенные на расстоянии l друг от друга в этой среде?

2. Две тонкие параллельные пластины, расположенные на небольшом (по сравнению с размерами пластин) расстоянии $2h$ друг от друга, заряжены одноимённо с поверхностными плотностями σ_1 и σ_2 ($\sigma_2 > \sigma_1$). Между пластинами помещают диэлектрическую плоскопараллельную пластинку толщиной $d = h$ с проницаемостью ε. Найдите разность потенциалов V между пластинами. Чему равна поверхностная плотность положительного и отрицательного поляризационного заряда, возникающего на разных сторонах пластинки? Краевыми эффектами можно пренебречь.

3. Внутрь плоского конденсатора, обкладки которого соединены проводником, помещена плоскопараллельная пластина толщиной h из диэлектрика с «замороженной поляризацией» P. Вектор поляризации ортогонален боковым граням пластины и обкладкам конденсатора. Пренебрегая зависимостью поляризованности диэлектрика от электрического поля, определите напряжённость и индукцию электрического поля между обкладками конденсатора внутри и вне пластины, если расстояние между обкладками равно d.

4. Убедитесь в том, что поверхностная плотность поляризационного заряда в задачах 2 и 3 удовлетворяет соотношению $\sigma_{\text{пол}} = P_n$, справедливому на границе раздела диэлектрика и вакуума (P_n — нормальная составляющая вектора поляризации).

5. Почему для пластины с «замороженной поляризацией» (из задачи 3) понятие диэлектрической проницаемости теряет смысл?

6. Имеется тонкий длинный диэлектрический цилиндр длиной $2l$ и радиусом r с «замороженной» поляризацией $\mathbf{P}_0 = \text{const}$. Найдите напряжённость электрического поля в точке A, лежащей вблизи центра основания цилиндра. Во сколько раз это поле больше, чем в точке B, лежащей вблизи поверхности цилиндра в середине его высоты?

7. Пусть в конфигурации предыдущей задачи известна напряжённость поля в точке A: $E_A = 300$ В/см. Из того же материала сделан другой цилиндр, соотношение между высотой h которого и диаметром основания D задаётся формулой $h = 0{,}02D$. Определите напряжённость поля вблизи основания такого цилиндра.

Граничные условия

На границе раздела двух сред для нормальных компонент вектора индукции и тангенциальных вектора напряжённости справедливы соотношения, следующие из теоремы Гаусса и теоремы о циркуляции электрического поля (условие потенциальности поля свободных статических зарядов):

$$D_{2n} = D_{1n}, \qquad E_{2\tau} = E_{1\tau}.$$

8. Каким соотношением связаны углы φ_1 и φ_2, которые линии напряжённости составляют с нормалью к границе раздела двух сред, диэлектрические проницаемости которых равны ε_1 и ε_2?

9. Протяжённая диэлектрическая пластина толщиной h (диэлектрическая проницаемость ε) помещена в однородное электрическое поле $\mathbf{E}_0$, так что нормаль к пластине составляет угол θ $\left(\theta < \frac{\pi}{4}\right)$ с направлением поля. Чему равен модуль вектора поляризации $\mathbf{P}$, величина индукции $\mathbf{D}$ и напряжённости электрического поля $\mathbf{E}$ внутри пластины? Определите поверхностную плотность поляризационных зарядов. Как направлены векторы $\mathbf{E}$, $\mathbf{D}$ и $\mathbf{P}$ внутри пластины?

10. Рассмотрим протяжённую пластину с «замороженной» поляризацией. Пусть вектор поляризации $\mathbf{P}$ направлен перпендикулярно поверхностям пластины. Определите векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{D}$ внутри и вне пластины. Как изменится ответ, если нормаль к поверхности пластины составляет угол θ $\left(\theta < \frac{\pi}{4}\right)$ с вектором $\mathbf{P}$?

11. Найдите ёмкость плоского конденсатора (см. рис. 1), между обкладками которого располагаются две диэлектрические пластины: одна толщиной d_1 из материала с диэлектрической проницаемостью ε_1, а другая толщиной d_2 из материала с проницаемостью ε_2, если ёмкость конденсатора без пластин равна C_0. Изменится ли искомая ёмкость, если на границе раздела диэлектриков будет размещена тонкая плоская проводящая пластина?

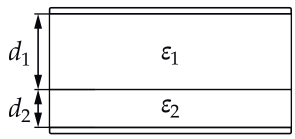

Рис. 1

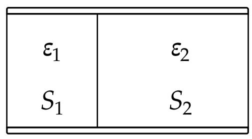

Рис. 2

12. Определите ёмкость плоского конденсатора (см. рис. 2), между обкладками которого располагаются два слоя диэлектрика площадью сечения S_1 и S_2 и толщиной, равной расстоянию между обкладками конденсатора. Диэлектрические проницаемости слоёв равны ε_1 и ε_2, ёмкость конденсатора без диэлектрика равна C_0. Верно ли, что вблизи границы раздела между диэлектриками на каждый из них действует горизонтальная сила?

13. Между обкладками плоского конденсатора (см. рис. 3) находятся две диэлектрические пластины: одна толщиной $d = 0{,}885$ мкм из материала с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 10$, другая толщиной $2d = 1{,}77$ мкм из материала с проницаемостью $2\varepsilon = 20$. Конденсатор подключен к источнику с ЭДС $\mathscr{E} = 48$ В. Размеры обкладок конденсатора значительно больше расстояния между ними. Найдите поверхностную плотность свободных зарядов на верхней обкладке конденсатора. Чему равна суммарная поверхностная плотность поляризационных зарядов на границе раздела диэлектриков?

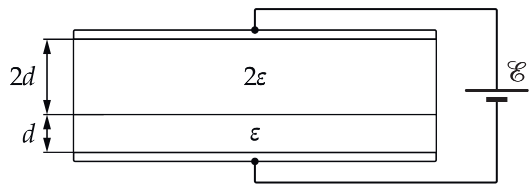

Рис. 3

14. Пространство между обкладками плоского конденсатора площадью S заполнено двумя диэлектриками так, как показано на рис. 4. Расстояние между обкладками d значительно меньше их поперечных размеров ($d \ll \sqrt{S}$). Определите ёмкость конденсатора. Опишите картину линий напряжённости электрического поля между обкладками этого конденсатора, заряженного от батарейки.

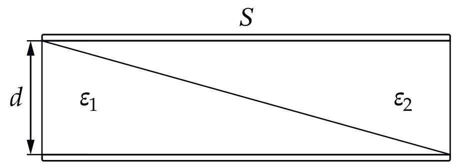

Рис. 4

15. Чему равна напряжённость поля внутри шара с «замороженным» вектором поляризации $\mathbf{P}$? Опишите качественно характер изменения поля снаружи шара.

16. Определите напряжённость и индукцию электрического поля внутри и вне очень длинного цилиндрического стержня радиусом R_0, изготовленного из диэлектрика с «замороженным» вектором поляризации $\mathbf{P}$. Направление вектора $\mathbf{P}$ перпендикулярно оси стержня. Как изменится ответ, если вектор $\mathbf{P}$ составляет угол θ с осью стержня?

17. В протяжённой пластине из диэлектрика с проницаемостью ε создано однородное электрическое поле напряжённостью $\mathbf{E}$. В пластине имеется небольшая (по сравнению с размерами пластины) сферическая полость. Считая поляризацию пластины однородной, определите напряжённость поля внутри полости.

18. Шар из материала с диэлектрической проницаемостью ε вносят в однородное поле напряжённостью E_0. Предполагая, что шар поляризован однородно, определите напряжённость электрического поля внутри шара. Как распределятся поляризационные заряды по поверхности шара? Убедитесь в том, что электрическая индукция и напряжённость поля, найденные в предположении об однородной поляризованности шара, удовлетворяют граничным условиям и условию на бесконечности, а следовательно дают решение задачи об электрическом поле внутри и вне диэлектрического шара в однородном поле внешних источников.

Поляризуемость молекул

Пусть молекула некоторого вещества в поле напряжённостью $\mathbf{E}$ приобретает дипольный момент $\mathbf{p}$, тогда коэффициент пропорциональности α в формуле $\mathbf{p} = \alpha\varepsilon_0\mathbf{E}$ называется *поляризуемостью* молекулы.

19. Чему равна поляризуемость маленького металлического шарика радиусом r? Чему равна диэлектрическая проницаемость разреженного газа таких маленьких металлических шариков, если их концентрация равна n при этом $nr^3 \ll 1$?

20. В предыдущей задаче при вычислении диэлектрической проницаемости предполагалось, что поле, действующее на каждый шарик, совпадает с внешним полем $\mathbf{E}$. В плотных средах это приближение перестаёт работать: каждая молекула «чувствует» не только внешнее поле, но и поле окружающих её поляризованных молекул. Локальное поле $\mathbf{E}_{\text{лок}}$, непосредственно действующее на молекулу, есть сумма этих двух вкладов.

Считая локальное поле равным полю внутри воображаемой сферической полости, вырезанной в равномерно поляризованной среде с поляризацией $\mathbf{P}$, покажите, что учёт взаимодействия между молекулами приводит к формуле Клаузиуса–Мосотти:

$$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \frac{n\alpha}{3}.$$

Покажите, что при условии $n\alpha \ll 1$. диэлектрическая проницаемость, полученная из соотношения Клаузиуса-Мосотти совпадает с формулой, найденной в предыдущей задаче.

Плотность электрической энергии

Бесконечно-малое изменение плотности электрической энергии в диэлектрической среде равно скалярному произведению

$$\mathrm{d}w = \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{D}\,.$$

В линейных средах, для которых индукция и напряжённость поля пропорциональны $\mathbf{D} = \varepsilon\varepsilon_0\mathbf{E}$, справедливы соотношения

$$w = \frac{DE}{2} = \frac{D^2}{2\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{E^2\varepsilon\varepsilon_0}{2}.$$

21. В конфигурации задачи 2 определите плотность энергии внутри (w_{I}) и вне (w_{II}) диэлектрической пластинки, а также давление, испытываемое поверхностями пластинки, содержащими поляризационные заряды.

22. Диэлектрическая пластина из материала с проницаемостью ε целиком заполняет пространство между обкладками плоского конденсатора, ёмкость которого без диэлектрика равна C_0. Какую минимальную работу должны совершить внешние силы, чтобы удалить пластину из конденсатора? Рассмотрите два случая: конденсатор заряжен от источника с ЭДС $\mathscr{E}$ и отключён от источника; конденсатор всё время подключён к источнику.

23. В центре очень большого жидкого шара из диэлектрика с проницаемостью ε в невесомости находится маленький заряженный шарик радиусом R_0. Поверхностная плотность зарядов шарика равна σ, а давление снаружи жидкого шара равно p_0. Какое давление оказывает диэлектрик на шарик? Почему формула

$$p = p_0 + E_0\sigma_{\text{пол}} = p_0 + \frac{\sigma^2}{\varepsilon_0} \cdot \left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right),$$

предполагающая, что добавочное давление порождается притяжением поляризационных зарядов диэлектрика к шарику, даёт неверный результат?

24. В сферическом конденсаторе радиус внутренней проводящей сферы равен $R_1 = R_0$, а радиус внешней $R_2 = 3R_0$. Пространство между сферами заполнено жидким диэлектриком с проницаемостью ε. Конденсатор заряжен до напряжения U и отключён от источника. Чему равно давление, оказываемое диэлектриком на каждую из сфер, если давление в точках, удалённых от общего центра сфер на расстояние $2R_0$ равно p_0? Силой тяжести можно пренебречь.

25. Обкладки плоского конденсатора (находящегося в вакууме) и расположенного горизонтально имеют форму квадратов с длиной стороны L. Расстояние между обкладками равно d. Внутрь конденсатора вставлена длинная плоская пластина толщиной d из материала с диэлектрической проницаемостью ε, так что граница раздела между диэлектриком и вакуумом располагается на расстоянии x от края обкладок. Определите горизонтальную силу F_q, действующую на пластину со стороны электрического поля, если конденсатор заряжен от источника с ЭДС $\mathscr{E}$ и отключён от источника. Чему будет равно значение этой силы ($F_{\mathscr{E}}$), если конденсатор не отключать от источника?

26. Плоский конденсатор с квадратными обкладками со стороной a (расстояние между ними $d \ll a$) расположен вертикально так, что обкладки слегка погружены в широкий сосуд с жидким диэлектриком плотности ρ и диэлектрической проницаемости ε. Ускорение свободного падения равно g.

Пренебрегая капиллярными эффектами, определите, на какую высоту h поднимется жидкость в зазоре между обкладками в двух случаях: когда они постоянно подключены к источнику напряжения U, и когда конденсатор предварительно заряжен в воздухе до напряжения U, а затем отключён от источника перед погружением в жидкость. Считайте процесс подъёма жидкости квазистатическим.

Оценивая капиллярное давление величиной $p_{\text{кап}} = \frac{\sigma}{d}$, определите, при каком напряжении можно пренебречь капиллярными эффектами, если диэлектриком служит вода ($\varepsilon = 80$, $\rho = 10^3$ кг/м^3, $\sigma = 0{,}07$ Н/м), $d = 1$ мм и $a = 10$ см. При каком напряжении жидкость поднимется в конденсаторе до самого верха (считается, что конденсатор всё время подключён к источнику)?

27. Одна половина проводящего шарика радиусом R с зарядом Q погружена в диэлектрическую жидкость с проницаемостью ε_1, а другая половина в другую жидкость с диэлектрической проницаемостью ε_2 ($\varepsilon_2 > \varepsilon_1$). Чему равна сила, действующая на шарик со стороны этих жидкостей? Силой тяжести можно пренебречь.

28. Конденсатор заполнен диэлектриком и заряжен до разности потенциалов U. Обкладки конденсатора на короткое время замыкают друг с другом, после чего размыкают. За время замыкания разность потенциалов уменьшается до $0{,}01U$. Известно, что характерное время установления поляризации диэлектрика значительно больше времени, в течение которого обкладки остаются замкнутыми. После размыкания обкладок разность потенциалов на конденсаторе медленно возрастает и за 10 с достигает $0{,}98U$. Объясните наблюдаемый эффект. Найдите диэлектрическую проницаемость вещества, заполняющего конденсатор. Оцените, сколько времени потребуется, чтобы, повторяя циклы замыкания и размыкания, разрядить конденсатор до напряжения $0{,}1U$.

Ответы и комментарии

1. $D = \frac{q}{4\pi r^2}$, $E = \frac{D}{\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2}$, $\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r}$, $P = \frac{q(\varepsilon-1)}{4\pi r^2\varepsilon}$; $F = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2}$.

2. $V = \frac{\sigma_2-\sigma_1}{2\varepsilon_0}h \cdot \frac{\varepsilon+1}{\varepsilon}$, $\sigma_{\text{пол}} = \frac{\sigma_2-\sigma_1}{2\varepsilon_0} \cdot \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}$.

3. Обозначаем индексом I величины, относящиеся к области внутри пластины, а индексом II — величины, относящиеся к области между обкладками вне пластины. $D_{\text{II}} = P\frac{h}{d}$, $E_{II} = \frac{D_{\text{II}}}{\varepsilon_0} = \frac{Ph}{d\varepsilon_0}$, $D_{\text{I}} = D_{\text{II}} = P\frac{h}{d}$, $E_I = \frac{D_{\text{I}}}{\varepsilon_0} - \frac{P_{\text{I}}}{\varepsilon_0} = \frac{P}{\varepsilon_0}\left(1-\frac{h}{d}\right)$, поле в области I направлено противоположно полю в области II.

5. Рассматриваемая пластина изготовлена из нелинейного диэлектрика. В этом легко убедиться, если заметить, что внутри пластины (в отсутствие внешних источников поля) электрическая индукция равна нулю, а напряжённость поля нулю не равна.

6. $E_A = \frac{P_0}{2\varepsilon_0}$, $\frac{E_A}{E_B} = \frac{r^2}{l^2}$, см. также Example 3-2, p. 166 из книги [1];

7. $E = \frac{2h}{D} \cdot E_A = 12\ \frac{\text{В}}{\text{см}}$, из рассматриваемой точки верхняя поверхность цилиндра видна под телесным углом $\Omega_{\text{up}} = 2\pi$, а нижняя видна под телесным углом $\Omega_{\text{down}} = 2\pi\left(1-\frac{2h}{D}\right)$.

8. $\frac{\operatorname{tg}\varphi_1}{\operatorname{tg}\varphi_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$, см. §15 из [7].

9. $E = E_0\sqrt{\sin^2\theta + \frac{\cos^2\theta}{\varepsilon^2}}$, $D = \varepsilon_0 E_0\sqrt{\cos^2\theta + \varepsilon^2\sin^2\theta}$, $P = \varepsilon_0(\varepsilon-1)\,E_0\sqrt{\sin^2\theta + \frac{\cos^2\theta}{\varepsilon^2}}$. Поверхностная плотность поляризационных зарядов $\sigma_p = \varepsilon_0\,\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}\,E_0\cos\theta$. Все три вектора $\mathbf{E}$, $\mathbf{D}$ и $\mathbf{P}$ лежат в плоскости, образованной $\mathbf{E}_0$ и нормалью к пластине $\mathbf{n}$; при этом $\mathbf{E}$ и $\mathbf{P}$ отклоняются от нормали на больший угол, чем $\mathbf{E}_0$, а $\mathbf{D}$ — на меньший.

10. *Случай* $\mathbf{P} \perp$ *пластине*: внутри $\mathbf{D} = 0$, $\mathbf{E} = -\frac{\mathbf{P}}{\varepsilon_0}$ (направлен против $\mathbf{P}$); снаружи $\mathbf{E} = 0$, $\mathbf{D} = 0$.
Случай произвольного угла θ: внутри $E = \frac{P\cos\theta}{\varepsilon_0}$ (направлен против нормали $\mathbf{n}$, т. е. против нормальной компоненты $\mathbf{P}$), $D = P\sin\theta$ (направлен вдоль тангенциальной компоненты $\mathbf{P}$); снаружи $\mathbf{E} = 0$, $\mathbf{D} = 0$.

11. $C = C_0 \cdot \frac{(d_1+d_2)\varepsilon_1\varepsilon_2}{d_1\varepsilon_2+d_2\varepsilon_1}$; не изменится.

12. $C = C_0 \cdot \frac{S_1\varepsilon_1+S_2\varepsilon_2}{S_1+S_2}$; да, сила действует, поскольку вблизи границы раздела поле искривляется и становится неоднородным.

13. $\sigma = 2{,}4\ \frac{\text{мКл}}{\text{м}^2}$, $\sigma_{\text{пол}}^{(\Sigma)} = \frac{\sigma}{2\varepsilon} = 0{,}12\ \frac{\text{мКл}}{\text{м}^2}$.

14. $C = \frac{S\varepsilon_0}{d} \cdot \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{\varepsilon_1-\varepsilon_2}\ln\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$. Следует разделить на бесконечно малые конденсаторы. Ёмкость одного:

$$\mathrm{d}C = \frac{\varepsilon_0\mathrm{d}S}{\frac{d_1(x)}{\varepsilon_1} + \frac{d_2(x)}{\varepsilon_2}} = \frac{S\varepsilon_0\varepsilon_1\varepsilon_2}{ad} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\varepsilon_2 x + \varepsilon_1(a-x)}.$$

Далее интегрируем по всей длине от 0 до a.

15. $\mathbf{E} = -\frac{\mathbf{P}}{3\varepsilon_0}$, поле снаружи шара эквивалентно полю диполя с моментом $\mathbf{p} = \frac{4\pi R^3}{3}\mathbf{P}$, помещённого в центр шара; см. задачу III.14 из [3], а также задачу 6.2.14 из [4] и §16 в [7]. Однородную поляризацию можно представить как сдвиг положительно заряженного шара относительно отрицательно заряженного. В области наложения двух шаров одинаковых радиусов, заряженных с объёмными плотностями ρ и $-\rho$ возникает однородное электрическое поле, равное $\mathbf{E} = -\frac{\rho\mathbf{l}}{3\varepsilon_0}$, где $\mathbf{l}$ — вектор, соединяющий центр отрицательно заряженного шара с центром положительно заряженного.

16. $\mathbf{E}_{\text{внутри}} = -\frac{\mathbf{P}}{2\varepsilon_0}$, $\mathbf{D}_{\text{внутри}} = \frac{\mathbf{P}}{2}$. Результат получен путем наложения поля одного равномерно заряженного цилиндра на поле другого, смещённого на малый вектор $\delta\mathbf{l}$. Вне стержня ($r > R_0$) поле соответствует полю дипольной нити

$$\mathbf{E} = \frac{R_0^2}{2\varepsilon_0 r^2}\left(\frac{2(\mathbf{P}\cdot\mathbf{r})\mathbf{r}}{r^2} - \mathbf{P}\right),$$

а $\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E}$. В случае, если вектор $\mathbf{P}$ составляет угол θ с осью стержня, вклад в электрическое поле внутри даёт только поперечная составляющая $P\sin\theta$, откуда $E_\theta = -\frac{P\sin\theta}{2\varepsilon_0}$, так как продольная компонента не создаёт зарядов на поверхности бесконечного цилиндра.

17. $\mathbf{E}_{\text{полость}} = \mathbf{E}\cdot\frac{2+\varepsilon}{3}$. Полость можно представить как суперпозицию сплошного однородно поляризованного диэлектрика и маленького шара с поляризацией $-\mathbf{P}$.

18. $E(r) = \frac{3E_0}{\varepsilon+2}$, $r < R$, где R — радиус шара. Поляризационный заряд распределяется по поверхности шара с плотностью $\sigma(\theta) = 3E_0\varepsilon_0 \cdot \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}$.

19. $\alpha = 4\pi r^3$, $\varepsilon = 1 + 4\pi r^3 n$; см. также стр. 133, 134 из книги [3].

20. Локальное поле $\mathbf{E}_{\text{лок}} = \mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{3\varepsilon_0}$; подставляя $\mathbf{P} = n\varepsilon_0\alpha\,\mathbf{E}_{\text{лок}}$ и $\mathbf{P} = \varepsilon_0(\varepsilon-1)\mathbf{E}$, получаем $\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2} = \frac{n\alpha}{3}$. Выражая ε явно: $\varepsilon = \frac{3+2n\alpha}{3-n\alpha}$, при $n\alpha \ll 1$ имеем:

$$\varepsilon \approx \left(1+\frac{2n\alpha}{3}\right)\left(1+\frac{n\alpha}{3}\right) \approx 1 + n\alpha,$$

что совпадает с результатом предыдущей задачи, поскольку $\alpha = 4\pi r^3$.

21. $w_{\text{II}} = \frac{(\sigma_2-\sigma_1)^2}{8\varepsilon_0}$, $w_{\text{I}} = \frac{w_{\text{II}}}{\varepsilon} = \frac{(\sigma_2-\sigma_1)^2}{8\varepsilon_0\varepsilon}$, $p = w_{\text{I}} - w_{\text{II}} = \frac{(\sigma_2-\sigma_1)^2}{8\varepsilon_0}\left(1-\frac{1}{\varepsilon}\right)$.

22. $A_q = \frac{C_0\mathscr{E}^2}{2}\cdot\varepsilon(\varepsilon-1)$; $A_{\mathscr{E}} = \frac{C_0\mathscr{E}^2}{2}\cdot(\varepsilon-1)$.

23. $P(R_0) = P_0 + \frac{\sigma^2(\varepsilon-1)}{2\varepsilon_0\varepsilon^2}$. Результат получен из условия равновесия жидкости в электрическом поле: $P - \frac{\varepsilon_0(\varepsilon-1)E^2}{2} = \text{const}$, где напряжённость поля внутри диэлектрика $E(r) = \frac{\sigma R_0^2}{\varepsilon_0\varepsilon r^2}$. Приведённая в условии формула неверна, так как она учитывает только силу притяжения связанных зарядов к свободному заряду шарика, но полностью игнорирует изменение собственного давления жидкости (градиент давления), возникающее из-за поляризации диэлектрика в неоднородном поле.

24. $p(R_0) = p_0 + \frac{(\varepsilon-1)\,\sigma^2}{2\varepsilon_0\varepsilon^2}$. Результат получен из условия гидростатического равновесия жидкого диэлектрика в неоднородном электрическом поле: $p - \frac{\varepsilon_0(\varepsilon-1)E^2}{2} = \text{const}$. Поле заряженного шарика в диэлектрике $E(r) = \frac{R_0^2\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon\, r^2}$. На бесконечности $p = p_0$, $E = 0$, откуда const $= p_0$. Формула из условия неверна, поскольку она учитывает лишь притяжение поверхностных поляризационных зарядов к шарику, но не давление, возникающее в объёме жидкого диэлектрика из-за неоднородности поля.

25. $F_q = \frac{C_0\mathscr{E}^2}{2L} \cdot \frac{\varepsilon-1}{\left(\frac{x}{L}(\varepsilon-1)+1\right)^2}$; $F_{\mathscr{E}} = \frac{C_0\mathscr{E}^2}{2L} \cdot (\varepsilon - 1)$; параметр C_0 — ёмкость конденсатора без диэлектрика: $C_0 = \frac{L^2\varepsilon_0}{d}$; см. также задачу V.23, стр. 266 из [3].

26. $h_U = \frac{(\varepsilon-1)\varepsilon_0 U^2}{2\rho g d^2}$. При постоянном заряде h_Q — положительный корень кубического уравнения

$$(\varepsilon-1)^2 h^3 + 2a(\varepsilon-1)\,h^2 + a^2\,h = h_U a^2;$$

при $\varepsilon \gg 1$ и умеренных напряжениях $(\varepsilon - 1)h \gg a$, первый член доминирует над вторым и третьим, откуда $h_Q \approx \left(\frac{\varepsilon_0 U^2 a^2}{2\rho g d^2 \varepsilon}\right)^{1/3} \ll h_U$. Капиллярными эффектами можно пренебречь при $U \gg \sqrt{\frac{2\sigma d}{(\varepsilon-1)\varepsilon_0}} \sim 4$ В. Жидкость поднимется до верха обкладок при $U = \sqrt{\frac{2\rho g d^2 a}{(\varepsilon-1)\varepsilon_0}} \approx 600$ В.

27. $F = \frac{(\varepsilon_2-\varepsilon_1)\,Q^2}{8\pi\varepsilon_0(\varepsilon_1+\varepsilon_2)^2 R^2}$.

28. При быстром замыкании обкладок свободный заряд частично стекает, но поляризация диэлектрика не успевает измениться. После размыкания поляризация медленно релаксирует к новому равновесному значению, что приводит к росту напряжения. Количественно: сразу после замыкания поляризация $P_0 = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)\frac{U}{d}$ заморожена, поле $E_1 = \frac{0{,}01U}{d}$, и свободный заряд на обкладках $\sigma_{\text{св}} = \varepsilon_0 E_1 + P_0 = \varepsilon_0 \frac{U}{d}(\varepsilon - 0{,}99)$. После релаксации поляризация приходит в равновесие с полем $E_f = \frac{0{,}98U}{d}$, и $\sigma_{\text{св}} = \varepsilon\varepsilon_0 E_f = 0{,}98\,\varepsilon\,\varepsilon_0\frac{U}{d}$. Приравнивая: $\varepsilon - 0{,}99 = 0{,}98\,\varepsilon$, откуда $\varepsilon = \frac{0{,}99}{0{,}02} \approx 50$. За каждый цикл «замыкание–размыкание–ожидание» напряжение уменьшается в 0,98 раз. Условие $0{,}98^n \le 0{,}1$ даёт $n \ge \frac{\ln 0{,}1}{\ln 0{,}98} \approx 114$ циклов. При длительности каждого цикла около 10 с на разрядку до $0{,}1U$ потребуется приблизительно 19 мин.

Комментарии к списку литературы

При составлении задания использовались задачники [4] и [6]. Теоретический материал разбирается в учебниках [2] (на простом, школьном уровне, система СИ), [5] (довольно коротко, система СИ) и [7] (система СГС). Очень полезной может оказаться книга [3] (система СИ), в которой на примерах задач подробно и понятно разбираются многие сложные вопросы теории. Если вы в состоянии читать литературу на английском языке, то рекомендуем ознакомиться с книгой [1] профессора MIT Маркуса Зана, в которой разбирается большое количество нетривиальных задач, а сложные для понимания рассуждения поясняются понятными рисунками (система СИ).

Список литературы

1. *Zahn M.* Electromagnetic field theory: a problem solving approach. — Malabar, FL : Krieger Publishing Company, 2003. — 727 с. — URL: `https://docs.google.com/file/d/0B21HoBq6u9TsVk5HVVo0S1YyMUk/view`.
2. *Бега Р. К.*, *Лебедев В. В.*, *Хлюстиков И. Н.* Электростатика. — М. : МЦНМО, 2008. — 320 с.
3. *Брандт Н. Н.*, *Миронова Г. А.*, *Салецкий А. М.* Электростатика в вопросах и задачах. Пособие по решению задач для студентов: Учебное пособие. — 2-е изд., испр. — СПб. : Издательство «Лань», 2010. — 288 с. — (Учебники для вузов. Специальная литература).
4. Задачи по физике: Учебное пособие. / И. И. Воробьёв [и др.] ; под ред. О. Я. Савченко. — 3-е изд., испр. и доп. — Новосибирск : Новосибирский государственный университет, 1999. — 370 с. — URL: `https://inp.nsk.su/~telnov/mech/zadachniki/savchenko.pdf`.
5. *Кингсеп А. С.*, *Локшин Г. Р.*, *Ольхов О. А.* Основы физики. Курс общей физики: Учебн. В 2 т. Т. 1. Механика, электричество и магнетизм, колебания и волны, волновая оптика / под ред. А. С. Кингсепа. — М. : ФИЗМАТЛИТ. — 506 с.
6. *Козел С. М.* [и др.]. Сборник задач по общему курсу физики: Учебн. пособие: Для вузов. В трёх частях. Электричество и магнетизм. Оптика / под ред. В. А. Овчинкина. — 3-е изд., испр. и доп. — М. : Физматкнига. — 400 с.
7. *Сивухин Д. В.* Общий курс физики. Учебное пособие. Для вузов. В 5 т. Т. 3. Электричество. — 6-е изд., стереот. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2020. — 656 с.

П. Крюков