Дифференцирование

Производная функции

Пусть функция $y = f(x)$ определена на интервале (a, b). Зафиксируем какую-нибудь точку x из (a, b) и рассмотрим другую точку $x + \Delta x$ этого интервала. Величину Δx назовём приращением аргумента функции в точке x. Составим разность

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

При фиксированной точке x эта разность является функцией аргумента Δx. Она называется приращением функции $y = f(x)$ в точке x.

Рассмотрим отношение

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Оно также является функцией аргумента Δx.

Определение. Если существует $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, то он называется производной функции $y = f(x)$ в точке x.

Обозначения производной: $f'(x)$, $y'(x)$. В физике часто используется обозначение $\dot{y}(x)$, обычно в том случае, когда x – время. Операция нахождения производной называется дифференцированием.

Дифференциал функции

Определение. Дифференциалом функции $y = f(x)$ в точке x называется линейная функция аргумента Δx:

$$dy = f'(x)\Delta x.$$

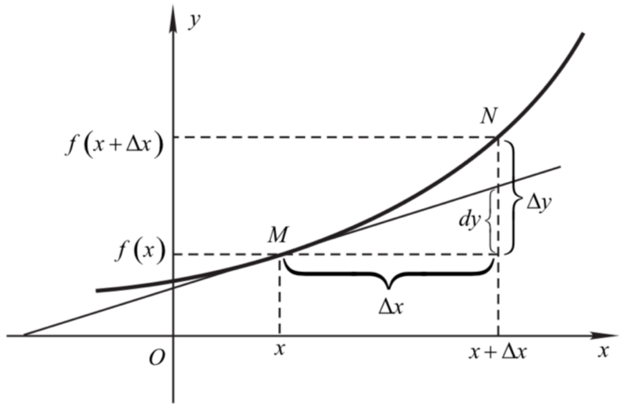
Отметим, что если $f'(x) \neq 0$, то dy является главной частью Δy при $\Delta x \to 0$. Если же $f'(x) = 0$, то $dy = 0$ и уже не является главной частью приращения функции.

Дифференциалом независимой переменной x назовём приращение этой переменной: $dx = \Delta x$. В таком случае, если x – независимая переменная, то производная функции в точке x равна отношению дифференциала функции в этой точке к дифференциалу независимой переменной:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}.$$

Замечание. Обозначение производной $\frac{dy}{dx}$, введённое Лейбницем, является не единым символом, а дробью, в которой числитель и знаменатель имеют свой смысл. Для более глубокого понимания этого факта рекомендуем прочитать параграф из книги Р. Куранта, Г. Роббинса [1] (гл. VIII, §4).

Геометрический смысл дифференциала. Дифференциал dy равен тому изменению функции $y = f(x)$ при изменении аргумента на Δx, которое имела бы функция, если бы на отрезке $[x, x + \Delta x]$ она была линейной с угловым коэффициентом прямой (её графика), равным $f'(x)$.



Формула Тейлора

Пусть функция $f(x)$ определена на интервале (a,b) и имеет в точке $x_0 \in (a,b)$ производные до порядка n включительно. Тогда для любого $x \in (a,b)$ справедлива формула Тейлора n-го порядка:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + r_n(x),$$

где r_n – остаточный член формулы Тейлора.

Замечание 1. Удивительно, но, по сути, мы берём информацию о производных функции в одной единственной точке (!) и превращаем её в информацию о значениях этой функции вокруг этой точки.

Замечание 2. Строго говоря, вышеприведённая формула бессодержательна, если ничего не утверждается относительно $r_n(x)$. В курсе математического анализа доказывается, что $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{r_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0$.

Примеры решений

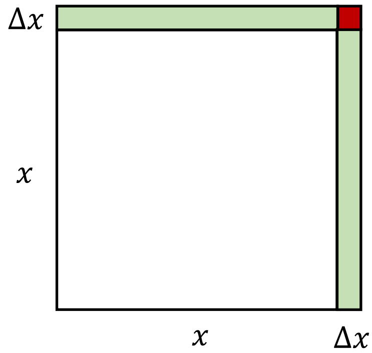
Пример 1. Пользуясь определением производной, найдите производную функции $y = x^2$ в точке $x = 1$.

Решение. Находим приращение функции $y = x^2$:

$$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2.$$

Отсюда получаем $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x$, стало быть, $y'(x) = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x$. В точке $x = 1$ производная функции $y(x)$ равна $y'(1) = 2$.

А вот решение в стиле древних греков. Смотри!



Пример 2. Составьте уравнение касательной к графику функции $y = \sin x$ в точке с абсциссой $x = \frac{\pi}{3}$.

Решение. Если функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 производную $f'(x_0)$, то график функции имеет в точке $(x_0, f(x_0))$ касательную, причём $f'(x_0)$ является угловым коэффициентом касательной, то есть уравнение касательной записывается в виде:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

В нашем примере $x_0 = \frac{\pi}{3}$, $f(x_0) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $f'(x_0) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$. Поэтому искомое уравнение касательной имеет следующий вид:

$$y(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right).$$

Пример 3. Выбирая подходящее значение x_0, найдите приближённое значение: а) $\cos 151°$; б) $\ln 3$.

Решение. а) Рассмотрим функцию $y = \cos x$. Так как $y(150°) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $y'(150°) = -\sin 150° = -\frac{1}{2}$, $1° = \frac{2\pi}{360}$ (радиан) $\approx 0{,}0175$ (радиан). Так как $\Delta y \cong dy$ при малых Δx, то есть $y(x_0 + \Delta x) - y(x_0) \cong y'(x_0)\Delta x$, то

$$\cos 151° \approx -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{360} \approx -0{,}8747.$$

б) Рассмотрим функцию $y = \ln x$. Так как $y(e) = 1$, $y'(e) = \frac{1}{e}$, то

$$\ln 3 \approx 1 + \frac{1}{e}(3 - e) = \frac{3}{e} \approx 1{,}103.$$

Пример 4. Разложите функцию $f(x) = \operatorname{tg} x$ по формуле Тейлора с центром в точке $x = 0$ до члена с x^3 включительно.

Решение. Найдём производные функции $f(x) = \operatorname{tg} x$ до третьего порядка включительно:

$$f'(x) = \cos^{-2}x; \quad f''(x) = 2\cos^{-3}x \sin x; \quad f'''(x) = 6\cos^{-4}x \sin^2 x + 2\cos^{-2}x.$$

Отсюда получаем $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$, $f'''(x) = 2$. По формуле Тейлора имеем:

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + r_4.$$

Заметим, что вычисление $f^{(4)}(x)$ даёт $f^{(4)}(0) = 0$, поэтому $r_4 = r_5$.

Основные задачи

1. Найдите производные функций:

а) $y(x) = x^n,\ n \in \mathbb{N}$; б) $y(x) = \sin x$; в) $y(x) = \cos x$; г) $y(x) = \ln x,\ x > 0$; д) $y(x) = e^x$.

2. Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы в точке x. Тогда:

а) $(u(x) + v(x))' = u'(x) + v'(x)$; б) $(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$;

в) если $v(x) \neq 0$, то $\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$.

3. Найдите значения производной функции $f(x) = (x - 1)(x - 2)^2(x - 3)^3$ в точках:

а) $x = 1$; б) $x = 2$; в) $x = 3$.

4. Пусть функция $t = g(x)$ дифференцируема в точке x_0, $g(x_0) = t_0$, и функция $y = f(t)$ дифференцируема в точке t_0. Тогда сложная функция $F(x) = f(g(x))$ дифференцируема в точке x_0 и выполняется равенство:

$$F'(x_0) = f'(t_0)g'(x_0) = f'\big(g(x_0)\big)g'(x_0).$$

5. Найдите производные функций:

а) $y(x) = \operatorname{tg} x$; б) $y(x) = \sin x^2$; в) $y(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$; г) $y(x) = \ln\frac{x^2-1}{x^2+1}$.

6. Найдите первую и вторую производные функций:

а) $f(x) = e^{x^2}$; б) $x(t) = vt\sin(\omega t)$; в) $y(x) = A\operatorname{ch}(kx + b)$.

7. Обозначим $r(x) = \sqrt{a^2 + x^2}$, где $a = \text{const}$. Найдите производные функций: $r(x)$, $\frac{1}{r(x)}$, $\frac{x}{r(x)}$.

8. Найдите все локальные экстремумы следующих функций:

а) $y(x) = \frac{x}{(1+x^2)^{3/2}}$; б) $y(x) = \sqrt{2x - x^2}$; в) $y(x) = e^x(2x - 3)$.

9. Найдите наименьшие и наибольшие значения следующих функций:

а) $x + \frac{1}{x}$ на отрезке $[0{,}1; 100]$; б) $\frac{1}{\sqrt{x^2+5x+11}}$ на отрезке $[-3; 3]$;

в) $\frac{x}{(1+x)^2}$ на отрезке $[0; 10]$.

10. Прямолинейное движение точки задано уравнением $s = 2t^2 + t + 1$, где t выражается в секундах, а s – в метрах. Найдите приращение и дифференциал пути s в момент времени $t = 1$ с и сравните их при: а) $\Delta t = 0{,}1$ с; б) $\Delta t = 0{,}2$ с; в) $\Delta t = 1$ с.

11. Пусть $u(x)$ и $v(x)$ – дифференцируемые функции x. Найдите дифференциал dy функции:

а) $y = uv$; б) $y = \frac{u}{v}$; в) $y = uv^{\frac{5}{3}}$.

12. Найдите дифференциал функции y в точке $x = x_0$, если:

а) $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$; б) $y = xe^{2x}$; в) $y = \arcsin\frac{x}{a}$; г) $y = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}$.

13. Заменяя приращение функции её дифференциалом, найдите приближённое значение:

а) $\sqrt{0{,}98}$; б) $\sin 31°$; в) $\sqrt[3]{1{,}01}$; г) $e^{0{,}2}$.

14. Найдите уравнение касательной к графикам функций в точке $x = 1$:

а) $\frac{x^7-10x}{x+5}$; б) $\ln(x^2)$; в) $\sqrt{\sin x^3}$.

15. Даны зависимости координат точки от времени:

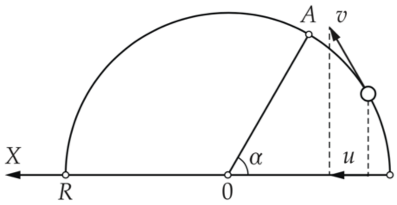
$x(t) = 4\sin\omega t - 3\cos\omega t$, $y(t) = 3\sin\omega t + 4\cos\omega t$,

ω — известная константа. Найдите модуль скорости и модуль ускорения точки в момент времени t. Какова траектория точки?

16. Дана зависимость ускорения точки от времени: 1) $a_x(t) = \alpha t + \beta t^2$; 2) $a_x(t) = A\cos\omega t$; α, β, A и ω – известные константы. Используя тот факт, что $a = \dot{v} = \ddot{x}$, где точкой обозначается дифференцирование по времени, подберите функции $x(t)$ и $v_x(t)$, удовлетворяющие начальным условиям: $x(0) = 0$, $v_x(0) = 0$.

17. Точка движется так, что модуль её радиус-вектора $r(t)$ и угол $\varphi(t)$ между осью $0X$ и радиус-вектором связаны соотношением $r\cos\varphi = \text{const}$. Известно, что в нулевой момент времени: $r(0) = r_0$, $\varphi(0) = 0$. Радиальная компонента скорости точки в процессе движения не меняется: $v_r = v_0$. Чему равна угловая скорость вращения радиус-вектора $\omega(t) = \varphi(t)$ в момент времени t? Почему физически такое движение реализовать невозможно?

18. Тело движется по окружности радиусом R так, что проекция его скорости на ось OX со временем не меняется и в любой момент равна u. Определите тангенциальное и полное ускорение тела в момент, когда тело проходит т. A, радиус-вектор которой составляет угол α с осью OX.



19. Тонкий однородный обруч катится без проскальзывания по наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом. Кинетическую энергию обруча при движении без проскальзывания можно рассчитывать по формуле $K = mv^2$, где m – масса обруча, v – скорость его центра. Дифференцируя закон сохранения энергии по времени, найдите ускорение центра обруча.

20. На горизонтальной поверхности с коэффициентом трения μ лежит брусок мессой m. Какую силу, направленную под углом α к горизонту, следует приложить к бруску, чтобы сдвинуть его с места? Продифференцируйте функцию $F(\alpha)$ по α и определите угол α_0, соответствующий минимальному значению $F_{\min}$ силы F. найдите значение $F_{\min}$.

21. Рассмотрим груз массой m, лежащий на гладком горизонтальном столе и привязанный пружиной жёсткости k в вертикальной стене. Пусть ось $0X$ системы отсчёта направлена горизонтально, вдоль оси пружины от стены. Ноль оси соответствует положению равновесия груза, при котором пружина не деформирована. Если сместить груз из положения равновесия на небольшое расстояние и отпустить – начнутся колебания, при которых механическая энергия системы будет оставаться постоянной (трением о воздух и неупругими деформациями пренебрегаем). Продифференцируйте выражение для энергии по времени и покажите, что из него следует второй закон Ньютона: $m\ddot{x} = -kx$, где $\ddot{x} = a_x$ – проекция ускорения на ось OX. Покажите, что функция вида:

$$x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t),$$

где A, B, ω – постоянные, является решением этого уравнения. Найдите значение параметра ω. Чему равен период колебаний T?

22. Потенциальная энергия взаимодействия молекул в ряде задач моделируется потенциалом Леннарда-Джонса, который даётся формулой

$$U(r) = 4E_0\left(\left(\frac{\sigma}{r}\right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{r}\right)^{6}\right),$$

где r – расстояние между молекулами, E_0 и σ – параметры, несущие определённый физический смысл, который (кроме прочего) предстоит выяснить в этой задаче. Покажите, что потенциальная энергия имеет минимум, соответствующий положению равновесия системы. Учтите, что сила взаимодействия молекул $F(r)$ равна производной потенциальной энергии: $F(r) = -\frac{dU}{dr}$. Определите расстояние r_0 между молекулами в положении равновесия. Какой физический смысл имеют константы E_0 и σ?

Дополнительные задачи

1. Пусть функция $y = f(x)$ определена, строго монотонна и непрерывна в окрестности точки x_0, дифференцируема в самой точке x_0 и $f'(x_0) \neq 0$. Тогда в некоторой окрестности точки y_0 существует обратная функция $x = f^{-1}(y)$, эта функция дифференцируема в точке y_0 и

$$f^{-1'}(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

2. Найдите производные функций:

а) $y(x) = \arcsin x$; б) $y(x) = \operatorname{arctg} x$.

3. Разложите функцию $f(x)$ по формуле Тейлора с центром в точке $x = 0$ до члена указанного порядка включительно:

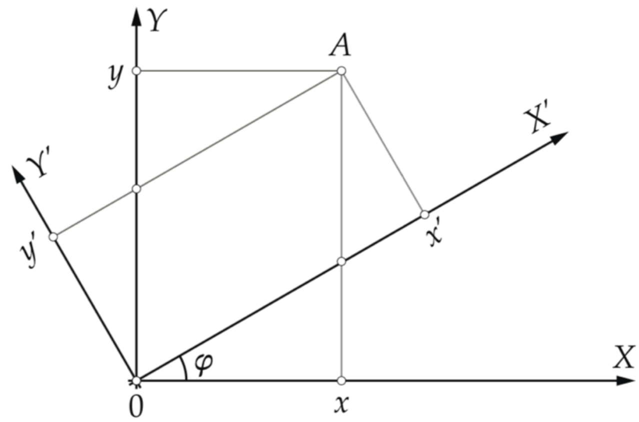
а) $f(x) = e^{-x}$ до члена с x^n; б) $f(x) = \sin x$ до члена с x^3;

в) $f(x) = \cos x$ до члена с x^4; г) $f(x) = \ln(1 + x)$ до члена с x^5.

4. Разложите функцию $f(x)$ по формуле Тейлора с центром в точке $x = 1$ до члена указанного порядка включительно:

а) $f(x) = x^2$; б) $f(x) = \sqrt{x}$ до члена с $(x-1)^3$; в) $f(x) = \sin\frac{\pi x}{2}$ до члена с $(x-1)^4$.

5. Начала систем отсчёта $X'0Y'$ и $X0Y$ совпадают. Штрихованная система $X'0Y'$ вращается относительно нештрихованной вокруг оси, проходящей через общее начало, с постоянной угловой скоростью ω, направленной против часовой стрелки. В момент времени t угол между осями $0X'$ и $0X$ оказывается равен $\varphi = \omega t$. Пусть некоторое тело (вообще говоря, движущееся) находится в этот момент в т. A, имеющей в штрихованной системе координаты (x', y'), а в нештрихованной (x, y).



а) Получите формулы преобразования координат точки (x', y') к координатам (x, y):

$$x = x' \cos\varphi - y' \sin\varphi,$$
$$y = x' \sin\varphi + y' \cos\varphi.$$

б) Дифференцируя по времени преобразования координат, получите для момента времени $t = 0$ формулы, дающие связь между проекциями вектора скорости в штрихованной системе (v'_x, v'_y) и проекциями в нештрихованной (v_x, v_y).

в) Покажите, что преобразование скоростей из п. б) может быть представлено в виде:

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{u},$$

где $\vec{v}'$ - вектор скорости тела в штрихованной системе. Как направлен вектор $\vec{u}$? Чему он равен по абсолютной величине? В чём состоит физический смысл формул преобразования скорости?

г) Продифференцируйте выражения для проекций скоростей из п. б) и получите формулы преобразования ускорений для момента времени $t = 0$. Обратите внимание на то, что дифференцирование следует производить для произвольного момента времени и только в конечных выражениях учитывать условие $t = 0$.

д) Два тела двигаются по окружностям одинакового радиуса R с одинаковыми скоростями v. Центры окружностей располагаются на расстоянии l ($l > 2R$) друг от друга. В нулевой момент времени скорости тел направлены перпендикулярно прямой, на которой лежат центры окружностей. Чему может быть равна скорость одного тела во вращающейся системе отсчёта, в которой второе тело неподвижно?

Комментарии и ссылки

[1] Р. Курант, Г. Роббинс. Что такое математика? – 3-е изд., испр. и доп. – М.: МЦНМО, 2004. Гл. VIII, §2-4.