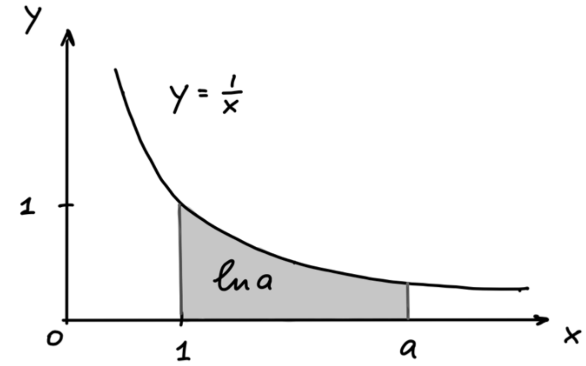
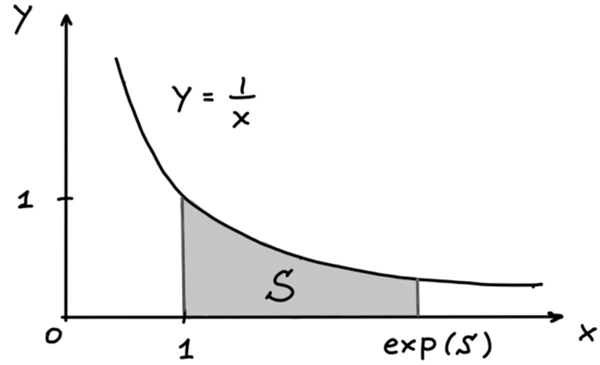
Логарифм и экспонента

Определение. Натуральный логарифм может быть определён геометрически для любого положительного вещественного числа $a \geq 1$ как площадь под кривой $y = \frac{1}{x}$ на промежутке $[1, a]$. Натуральный логарифм числа a обозначается $\ln a$.



Определение. Пусть $S = \ln a$. Тогда говорят, что число a является экспонентой числа S:

$$S = \ln a \iff a = \exp S.$$



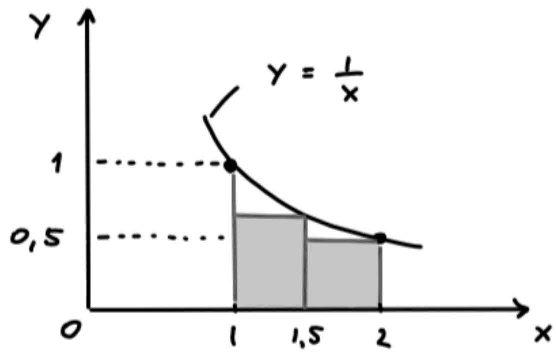
Замечание. Число, натуральный логарифм которого равен единице, играет в математике и физике большую роль. Со времён Леонарда Эйлера оно обозначается буквой e и приблизительно равняется 2,718281828… (мнемоника: сначала два и семь, потом дважды год рождения Льва Толстого[1]).

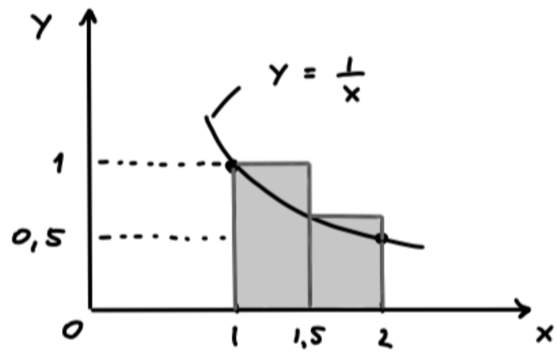
Пример 1. Докажите неравенство $\frac{7}{12} < \ln 2 < \frac{5}{6}$.

Решение. Оценим площадь криволинейной трапеции согласно рисункам. На левом рисунке видно, что площадь криволинейной трапеции больше суммы площадей двух прямоугольников, откуда получаем оценку снизу: $\ln 2 > \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1,5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{12}$. Из правого

[1] Дело в том, что Лев Николаевич Толстой родился в 1828 году. В связи с этим есть шутка. Люди делятся на три категории: те, кто запоминает число e через год рождения Льва Толстого, те, кто запоминает год рождения Льва Толстого через число e, и те, кому наплевать, и на число e, и на Льва Толстого.

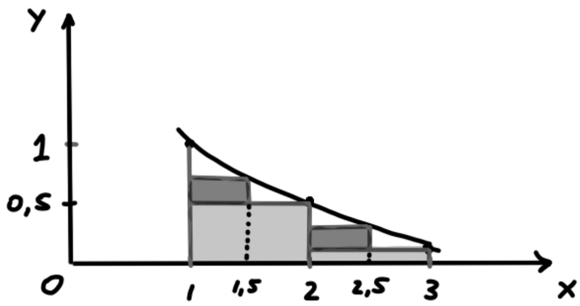
рисунка следует оценка сверху: $\ln 2 < \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1{,}5} = \frac{5}{6}$, поскольку площадь прямоугольников больше площади криволинейной трапеции.

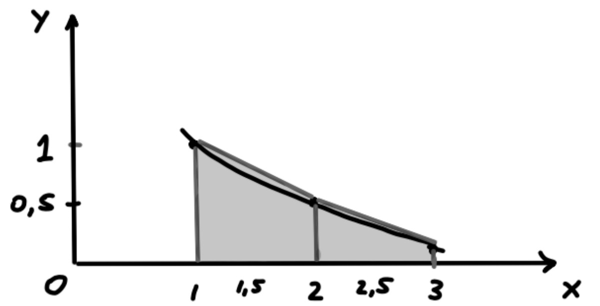




Пример 2. Найдите целую часть $\ln 36$.

Решение. Представим $\ln 36$ в виде $\ln 6 \cdot 6 = \ln 6^2 = 2\ln 6 = 2(\ln 2 + \ln 3)$. Воспользуемся оценками $\ln 2$ из примера 1. Аналогично решению примера 1 оценим $\ln 3$, исходя из представленных ниже рисунков.





Проделав несложные расчёты, получаем $\frac{19}{20} < \ln 3 < \frac{7}{6}$. Стало быть,

$$3 < 2\left(\frac{7}{12} + \frac{19}{20}\right) < 2(\ln 2 + \ln 3) < 2\left(\frac{5}{6} + \frac{7}{6}\right) < 4.$$

Целая часть $\ln 36$ равна 3.

Пример 3. Известно, что за малый промежуток времени Δt количество нераспавшихся ядер $N(t)$ радиоактивного образца уменьшается на величину ΔN, пропорциональную количеству имеющихся ядер $N(t)$ и этому интервалу времени Δt. Найдите зависимость от времени числа $N(t)$ ещё не распавшихся к данному моменту ядер некоторого радиоактивного образца.

Решение. Из условия следует, что

$$\Delta N = -\lambda N(t)\Delta t.$$

Рассмотрим функцию $f(N) \equiv \frac{1}{N}$, график которой представляет собой гиперболу. Площадь под графиком $f(N)$ на промежутке $[N_1, N_2]$ равна

$$\sum_i f(N_i) \cdot \Delta N_i = \sum_i \frac{1}{N_i} \cdot \Delta N_i = \sum_i \left(-\lambda \frac{\Delta t_i}{\Delta N_i}\right) \cdot \Delta N_i = -\lambda \sum_i \Delta t_i = -\lambda(t_2 - t_1),$$

где t_1 и t_2 – моменты времени, когда количество нераспавшихся ядер равно N_1 и N_2 соответственно. С другой стороны, площадь под гиперболой равна $\ln N_2 - \ln N_1 = \ln\frac{N_2}{N_1}$. Из определения экспоненты следует

$$\frac{N_2}{N_1} = \exp(-\lambda(t_2 - t_1)).$$

Таким образом, мы получили закон радиоактивного распада: $N(t) = N_0 \exp(-\lambda t) = N_0 e^{-\lambda t}$, где N_0 – количество нераспавшихся ядер в начальный момент времени.

Замечание 1. Приведённое решение тесно связано с операцией интегрирования, которую мы рассмотрим чуть позже.

Замечание 2. Коэффициент пропорциональности $\lambda > 0$ называется постоянной распада и представляет собой вероятность распада ядра за единицу времени.

Основные задачи

1. Докажите основные свойства натурального логарифма в предположении, что значения переменных x и y положительны, а n целое: а) $\ln xy = \ln x + \ln y$; б) $\ln x^n = n \ln x$; в) $\ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y$.

2. Изобразите любым удобным для вас способом график $y = \frac{1}{x}$ и касательную к нему в точке с координатами $\left(2, \frac{1}{2}\right)$. Посчитайте площадь трапеции, ограниченную касательной, отрезком $[1, 3]$ на оси абсцисс x, а также вертикальными прямыми $x = 1$ и $x = 3$. Какая нижняя оценка $\ln 3$ у вас получилась?

3. Докажите, что для любого натурального n существует значение логарифма, большее этого n. Какой вывод из этого факта можно сделать о значениях функции $\ln x$ при $x \to +\infty$?

4. Докажите неравенство $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n-1} > \ln n$.

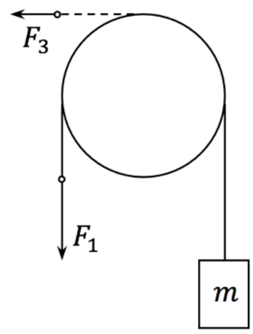
5. Докажите неравенство $\ln 10 > 2$.

6. Найдите целую часть: а) $\ln 25$; б) $\ln 81$; в) $\ln 1000$.

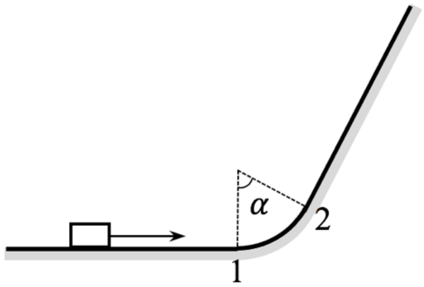
7. Докажите основные свойства экспоненты: а) $\exp S_1 \exp S_2 = \exp(S_1 + S_2)$; б) $(\exp S)^n = \exp nS$; в) $\exp x = e^x$.

8. Лодка движется по озеру со скоростью v_0. В нулевой момент времени двигатель выключают, и скорость лодки начинает уменьшаться, вследствие действия силы сопротивления воды. Найдите зависимость скорости лодки от времени $v(t)$ в предположении, что сила сопротивления воды пропорциональна скорости лодки. В какой момент времени скорость лодки будет в e раз меньше, чем v_0? На сколько процентов уменьшилась скорость?

9. Через неподвижное, горизонтально закрепленное бревно переброшена веревка. Чтобы удерживать груз массы $m = 6$ кг, подвешенный на этой веревке, необходимо тянуть второй конец веревки в вертикальном направлении с минимальной силой $F_1 = 40$ Н. С какой минимальной вертикальной силой F_2 надо тянуть веревку за свободный конец, чтобы груз начал подниматься? С какой минимальной горизонтальной силой F_3 надо тянуть веревку, чтобы груз начал подниматься?



10. Небольшое тело скользит по гладкой горизонтальной поверхности вдоль вертикальной стенки (на рисунке представлен вид сверху). Закругленная часть вертикальной стенки представляет собой дугу с углом $\alpha = 60°$. За счет трения о вертикальную стенку скорость тела упала в два раза при движении от точки 1 до точки 2. Найдите коэффициент трения между телом и стенкой.



11. В таблице приведены некоторые значения функции $y = \frac{A}{x^{\gamma}}$, округлённые до сотых.

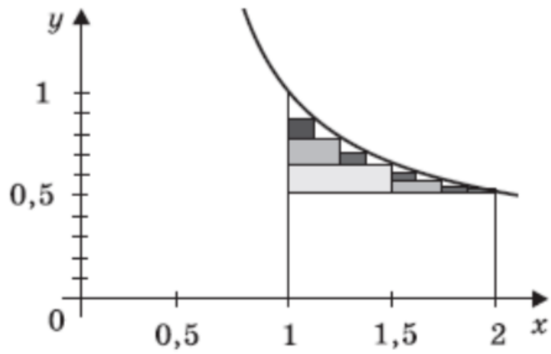
x	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
y	4,80	1,93	0,89	0,46	0,25	0,15

Определите максимально точно значения A и γ.

Дополнительные задачи

Определение. Гиперболическим поворотом называется преобразование плоскости, переводящее точку с координатами $(x;\, y)$ в точку с координатами $(kx;\, \frac{y}{k})$, где k – некоторая положительная константа, называемая коэффициентом поворота.

1. Докажите, что гиперболический поворот сохраняет площади фигур.
2. Докажите, что при преобразовании плоскости с помощью гиперболического поворота прямые переходят в прямые, а гиперболы вида $y = \frac{k}{x}$ переходят сами в себя и касательные к гиперболам переходят в касательные.
3. Найдите целую часть: а) $\ln 100$; б) $\ln 225$.
4. Докажите, что $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{5\cdot 6} + \cdots = \ln 2$. Подсказка: рассмотрите убывающую последовательность прямоугольников, изображенную на рисунке.



5. Рассмотрим формулу $e^x = \lim \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$, при $n \to \infty$, которая следует из оценки

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \le e \le \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Воспользуйтесь формулой бинома Ньютона и докажите следующее равенство:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

6. Разреженный газ изотермически расширяется от V до $2V$, затем от $2V$ до $8V$. В какой из частей процесса газ получил большее количество теплоты? Во сколько раз? *Указание*. Для решения этой задачи надо знать основы термодинамики.

Комментарии и ссылки

При подготовке листка использовались материалы Щепина Е.В. и Николаева Ю.Н., прочитанные ученикам одногодичного потока СУНЦ МГУ.

[1] Шень А. Логарифм и экспонента. – 2-е изд., стереотипное. – М.: МЦНМО. – 2013. – 24 с.

[2] Шведов О.Ю. Лекции по школьной математике. – М.: Издательство «Спорт и Культура – 2000». – 2011. – 200 с.