Олимпиада «Математика реальности» (ОМаР)
Младшая лига. 31.10.2023

Задача 1

На продуктовом складе каждый мешок муки расфасовывают по ***почти килограммовым*** пакетам, т.е. таким, что вес p кг любого из них удовлетворяет условию

$$|p-1| \leq 0{,}007.$$

Найдите ***наименьшее*** значение P_0, для которого мешок муки любого веса в P кг, не обязательно целочисленного, но удовлетворяющего оценке

$$P \geq P_0,$$

можно весь без остатка расфасовать по почти килограммовым пакетам (возможно, неодинакового веса).

Ответ: 70,503.

Решение. Всевозможные значения веса P любого мешка, который можно расфасовать по $n \in \mathbb{N}$ почти килограммовым пакетам, заполняют отрезок

$$K_n = [(1-0{,}007)n, (1+0{,}007)n].$$

Запишем условие того, что между двумя соседними отрезками K_n и K_{n+1} нет зазора:

$$1{,}007n \geq 0{,}993(n+1) \;\Leftrightarrow\; n \geq \frac{0{,}993}{1{,}007-0{,}993} = 70{,}9\ldots,$$

Отсюда следует, что все отрезки K_n с номерами $n \geq 71$ целиком заполняют луч $[P_0, +\infty)$, где

$$P_0 = 71 \cdot 0{,}993 = 70{,}503,$$

причём между этим лучом и предыдущим отрезком K_{70} зазор уже имеется.

Задача 2

Ромбический домкрат в рабочем состоянии выглядит, как ромб, у которого горизонтальная диагональ располагается вдоль длинного винта с ручкой (см. рис.). Эту ручку вращают с постоянной скоростью, в результате чего горизонтальная диагональ ромба сокращается на 1 мм в секунду, а вертикальная диагональ растёт, причём её нижняя точка (площадка) фиксирована на полу, а верхняя — поднимается вместе с грузом. В ***начальном*** положении ромб сплюснут так, что верхняя и нижняя его точки соприкасаются, а в ***конце*** вращения ромб вытягивается в вертикальный отрезок.

Когда ***скорость подъёма*** верхней точки домкрата при вращении его ручки максимальна (в начале вращения, в конце вращения или где-то между ними), и когда она минимальна?

Ответ: скорость максимальна в начальный момент, а минимальна в конечный.

Решение. Пусть $l, h \in [0, L]$ — половины горизонтальной и вертикальной диагоналей ромба соответственно в некоторый момент вращения винта (где L — длина стороны ромба; рис. 1), а $\Delta l, \Delta h$ — абсолютные величины их изменений за некоторое фиксированное малое время вращения (рис. 2). Тогда с помощью теоремы Пифагора получаем

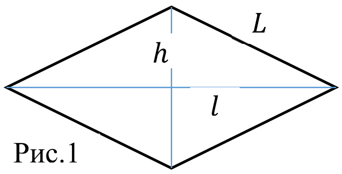


Рис.1

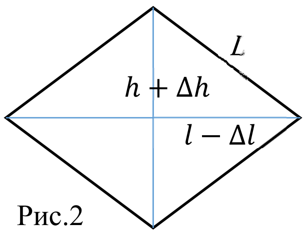


Рис.2

$$\begin{aligned}\Delta h = (h + \Delta h) - h &= \sqrt{L^2 - (l - \Delta l)^2} - \sqrt{L^2 - l^2} \\ &= \frac{(L^2 - (l - \Delta l)^2) - (L^2 - l^2)}{\sqrt{L^2 - (l - \Delta l)^2} + \sqrt{L^2 - l^2}} \\ &= \frac{(L^2 - (l - \Delta l)^2) - (L^2 - l^2)}{\sqrt{L^2 - (l - \Delta l)^2} + \sqrt{L^2 - l^2}} \\ &= \frac{(2l - \Delta l)\Delta l}{\sqrt{L^2 - (l - \Delta l)^2} + \sqrt{L^2 - l^2}} = f(l).\end{aligned}$$

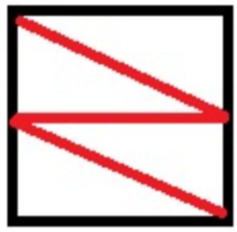
При вращении винта его длина l убывает, числитель дроби $f(l)$ уменьшается, а знаменатель увеличивается. Значит, изменение $\Delta h > 0$ в начальный момент максимально, а в конечный минимально. Поэтому скорость подъёма максимальна в начальный момент, а минимальна — в конечный.

Задача 3

Квадратный лист бумаги разрешается сгибать (а потом обязательно разгибать) по любой прямой линии, которая:

- либо проходит через две *ранее построенные* точки, т.е. точки на пересечении уже имеющихся линий сгиба и/или краёв листа (включая вершины квадрата);
- либо проходит через ранее построенную точку перпендикулярно к краю листа (в результате складывания этот край совмещается сам с собой);
- либо является серединным перпендикуляром к отрезку с концами в ранее построенных точках (в результате складывания эти две точки совмещаются).

К примеру, на рисунке горизонтальная линия сгиба даёт два равных прямоугольника, а все 3 сгиба вместе дают 4 равных треугольника.



Сколько раз нужно согнуть квадрат размером 1×1, чтобы получить прямоугольник размером:

а) $\frac{1}{3} \times 1$;

б) $\frac{1}{5} \times 1$;

в) $\frac{1}{6} \times 1$;

г) $\frac{1}{7} \times 1$?

Постарайтесь в каждом случае обойтись как можно меньшим числом сгибаний: чем их меньше, тем выше оценка за решение задачи.

Ответы: **а)** 4; **б)** 5; **в)** 4; **г)** 5.

Решение. Согнём квадрат $ABCD$ пополам по прямой EF, параллельной стороне AB (1-й сгиб), а затем:

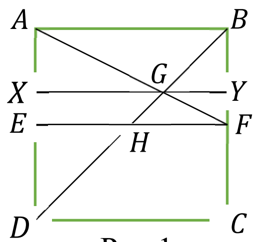


Рис.1

а, в) по диагонали BD (2-й сгиб), по прямой AF, пересекающей диагональ BD в точке G (3-й сгиб), и по прямой XY, проходящей через точку G перпендикулярно стороне AD (4-й сгиб), тогда прямоугольники $ABYX$ и $EFYX$ (рис. 1) — требуемые в пп. а) и в) соответственно, так как

$$EX : AX = HF : AB = 1 : 2 \;\Rightarrow\; AX = \frac{2}{3}AE = \frac{1}{3}AD, \;\; EX = \frac{1}{3}AE = \frac{1}{6}AD;$$

б) по диагонали BD (2-й сгиб), затем по серединному перпендикуляру GH к отрезку AE (3-й сгиб), затем по прямой AH, пересекающей диагональ BD в точке I (4-й сгиб), а затем по прямой XY, проходящей через точку I перпендикулярно стороне AD (5-й сгиб), тогда прямоугольник $ABYX$ (рис. 2) — требуемый, так как

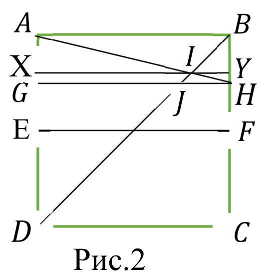


Рис.2

$$GX : AX = JH : AB = 1 : 4 \;\Rightarrow\; AX = \frac{4}{5}AG = \frac{1}{5}AD;$$

г) по серединному перпендикуляру GH к отрезку AE (2-й сгиб), затем по серединному перпендикуляру IJ к отрезку AG (3-й сгиб), затем по прямой DJ (рис. 3), пересекающей отрезок GH в точке K (4-й сгиб), а затем по прямой XY, проходящей через точку K перпендикулярно стороне AB (5-й сгиб), тогда прямоугольник $BCYX$ — требуемый, так как

$$BX : AB = KH : CD = JH : JC = 1 : 7 \quad \Rightarrow \quad BX = \frac{1}{7}AB.$$

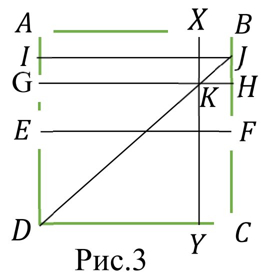


Рис.3

Замечание. В п. а) (рис. 1) показано, как, зная середину E стороны AD, получить точку X, отсекающую треть этой стороны. Аналогично доказывается, что если $AE = \frac{1}{n}AD$, то такое же построение даёт $AX = \frac{1}{n+1}AD$. Повторное применение этого приема позволяет, начав с квадрата, получить любой прямоугольник $\frac{1}{n} \times 1$. Этот способ универсальный, но не самый короткий.