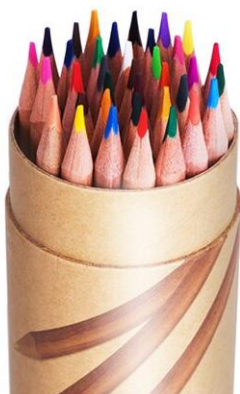


Олимпиада ПриМат  
Старшая и младшая лиги  
Задача 3



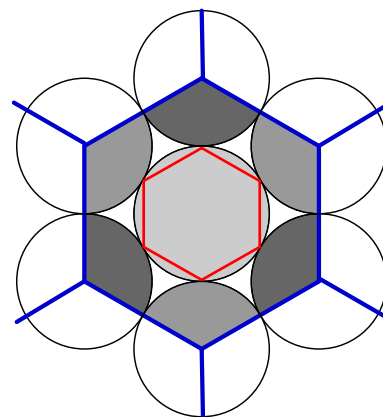
Деревянные карандаши, которые имеют форму кругового цилиндра, поступают на фабрику в упаковках по 3000 штук, каждая упаковка имеет форму цилиндра такой же высоты, что и карандаши, но большего радиуса. На фабрике из круглых карандашей делают шестигранные (сечение – правильный шестиугольник), срезая минимально возможное количество дерева. Оцените, сколько обработанных карандашей поместится в одну упаковку из-под необработанных? При оценке можно пренебречь краевыми эффектами и считать, что карандаши обоих видов упаковываются наиболее плотным образом.

Оцените ошибку, которая возникает из-за пренебрежения краевыми эффектами.

**Решение:**

В поперечном сечении упаковки карандашей образуется множество из равных кругов или правильных шестиугольников. Эти множества и будем рассматривать.

При наиболее плотной упаковке кругов вокруг каждого из них расположены 6 других, касающиеся его; их центры являются вершинами правильного шестиугольника со стороной  $2R$ , где  $R$  – радиус круга (см. рисунок). Занятая кругами область внутри этого шестиугольника состоит из одного целого круга и шести секторов с углом  $120^\circ$ , из которых можно составить еще два круга. То есть в шестиугольнике занята площадь, равная площади *трёх* кругов.



Сечение шестигранного карандаша — правильный шестиугольник со стороной  $R$ . Его площадь в четыре раза меньше площади большого шестиугольника, рассмотренного выше. Поскольку плоскость покрывается шестиугольниками без пробелов и перекрытий, на каждый большой шестиугольник приходится *четыре* малых. А так как краевыми эффектами, связанными с тем, как шестиугольники размещаются вблизи края упаковки, можно пренебречь, получаем, что в одной и той же упаковке поместится с большой точностью в  $4/3$  раза больше шестигранных карандашей, чем круглых.

Краевые эффекты затронут только один внешний слой карандашей. Так как в упаковку вмещается примерно 4000 шестигранных карандашей, а площадь сечения каждого шестигранного карандаша  $3\sqrt{3}R^2/2$ , то площадь сечения упаковки  $6000\sqrt{3}R^2$ , а ее радиус  $(6000\sqrt{3}/\pi)^{1/2}R \approx 55R$ . Площадь полосы шириной  $2R$ , примыкающей к краю составляет примерно  $2\pi \cdot 55R \cdot 2R = 220\pi R^2$ , то есть краевые эффекты сказываются примерно на 220 карандашах. Полагая, что удастся расположить половину из них, получим, что относительная ошибка определения количества карандашей, которые помещаются в упаковку данного радиуса, составляет

110/3000 для круглых карандашей и 110/4000 для шестигранных. Таким образом, ошибка представленной оценки составляет примерно  $11/3000 + 11/4000 \approx 6\%$

Ответ: 4000, 6%.