

3 тур интернет-олимпиады СУНЦ МГУ

Математика

8 класс

1. Дан треугольник $\triangle ABC$. Точка M на стороне BC такова, что $BM = \sqrt{3}MC$. Точка B_1 — основание перпендикуляра из точки B на биссектрису угла BMA . Точка C_1 — основание перпендикуляра из точки C на биссектрису угла CMA . Прямые AM и B_1C_1 пересекаются в точке X . Найдите отношение $B_1X : XC_1$.
2. Лень задумал простое число $p > 2$, а также три различных натуральных числа a, b, c . Оказалось, что числа $ab + 1, bc + 1$ и $ca + 1$ делятся на p . Могло ли так получиться, что $a + b + c < 3p + 6$?
3. Докажите, что для любых вещественных чисел x, y, z выполнено неравенство

$$\sqrt{x^2 + \frac{1}{y^2}} + \sqrt{y^2 + \frac{1}{z^2}} + \sqrt{z^2 + \frac{1}{x^2}} \geq 3\sqrt{2}.$$

4. Таня записала на доске 21 натуральное число. Оказалось, что все записанные числа различны и не превосходят 2022. Докажите, что Катя может выбрать из чисел на доске такие три числа a, b, c , что $bc < 2a^2 < 4bc$.
5. Незнайка говорит, что придумал два таких иррациональных числа a и b , что числа $a + b$ и $a + b^2$ рациональны. Могут ли его слова быть правдой?
6. Дан тупоугольный треугольник ABC с тупым углом B . Известно, что $AC > BC > AB$. Окружность ω описана около $\triangle ABC$, BD и CE ее диаметры. Окружность с центром в точке A и радиусом AD пересекает луч AB в точке L . Окружность с центром в точке A и радиусом AE пересекает луч AC в точке K . Прямые DL и EK пересекаются в точке X . Докажите, что X лежит на окружности ω .