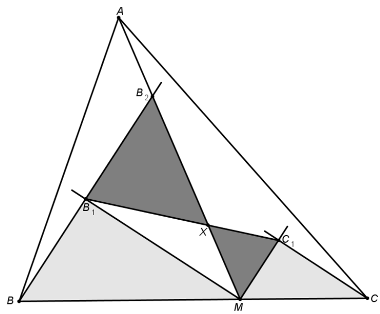
3 тур интернет-олимпиады СУНЦ МГУ, решения

Математика

8 класс

1. Дан треугольник $\triangle ABC$. Точка M на стороне BC такова, что $BM = \sqrt{3}MC$. Точка B_1 — основание перпендикуляра из точки B на биссектриссу угла BMA. Точка C_1 — основание перпендикуляра из точки C на биссектриссу угла CMA. Прямые AM и B_1C_1 пересекаются в точке X. Найдите отношение $B_1X : XC_1$.

Решение.



Продлим отрезок BB_1 до пересечения с AM в точке B_2. Заметим подобные и равные треугольники:

$$\triangle BB_1M = \triangle B_2B_1M \sim MC_1C; \quad \triangle B_1B_2X \sim C_1MX.$$

Эти подобия следуют из $\angle B_1MC_1 = 90^\circ$ и $BB_1 \parallel MC_1$ и $MB_1 \parallel CC_1$.

Теперь запишем:

$$\frac{B_1X}{XC_1} = \frac{B_1B_2}{MC_1} = \frac{BB_1}{MC_1} = \frac{BM}{MC} = \sqrt{3}.$$

Ответ: $B_1X : XC_1 = \sqrt{3}$

2. Леня задумал простое число $p > 2$, а также три различных натуральных числа a, b, c. Оказалось, что числа $ab+1, bc+1$ и $ca+1$ делятся на p. Могло ли так получиться, что $a+b+c < 3p+6$?

Решение. Заметим для начала, что ни одно из чисел a, b, c не делится на p. Действительно, если, например, a делится на p, то $1 = (ab+1) - ab$ — разность двух делящихся на p чисел, то есть 1 делится на p, что неверно.

Теперь заметим, что так как $ab+1 \equiv ca+1 \pmod{p}$, то $ab \equiv ac \pmod{p}$. Значит, либо $p|a$ (что неверно), либо $b \equiv c \pmod{p}$. Имеем $b \equiv c \pmod{p}$, аналогично $b \equiv c \pmod{p}$. Итак, $a \equiv b \equiv c \pmod{p}$.

Пусть r — остаток при делении a, b и c на p. Как мы уже замечали, $r > 0$. Докажем, что $r \neq 1$. Действительно, если $a \equiv b \equiv c \equiv 1 \pmod{p}$, то $ab+1 \equiv 2 \not\equiv 0 \pmod{p}$, что противоречит условию. Итак, $r \geqslant 2$.

Можно считать, что $a < b < c$. Тогда $a \geqslant 2$, $b \geqslant a+p \geqslant 2+p$; $c \geqslant b+p \geqslant 2+2p$. Сложив три полученные неравенства, получаем $a+b+c \geqslant 3p+6$.

Ответ: Не могло.

3. Докажите, что для любых вещественных чисел x, y, z выполнено неравенство

$$\sqrt{x^2+\frac{1}{y^2}}+\sqrt{y^2+\frac{1}{z^2}}+\sqrt{z^2+\frac{1}{x^2}} \geqslant 3\sqrt{2}.$$

Решение. Заметим что, по неравенству о средних

$$x^2+\frac{1}{y^2} \geqslant 2\frac{x}{y}; \quad y^2+\frac{1}{z^2} \geqslant 2\frac{y}{z}; \quad z^2+\frac{1}{x^2} \geqslant 2\frac{z}{x}.$$

Воспользуемся еще раз неравенством о средних:

$$\sqrt{x^2+\frac{1}{y^2}}+\sqrt{y^2+\frac{1}{z^2}}+\sqrt{z^2+\frac{1}{x^2}} \geqslant$$
$$\geqslant 3\sqrt[6]{\left(x^2+\frac{1}{y^2}\right)\left(y^2+\frac{1}{z^2}\right)\left(z^2+\frac{1}{x^2}\right)} \geqslant$$
$$\geqslant 3\sqrt[6]{2\frac{x}{y}\cdot 2\frac{y}{z}\cdot 2\frac{z}{x}} = 3\sqrt{2}.$$

Неравенство доказано.

4. Таня записала на доске 21 натуральное число. Оказалось, что все записанные числа различны и не превосходят 2022. Докажите, что Катя может выбрать из чисел на доске такие три числа a, b, c, что $bc < 2a^2 < 4bc$.

Решение. Разобьем числа от 1 до 2022 на 10 множеств:

$$\begin{aligned}
&S_1 = \{1; 2\};\\
&S_2 = \{3; 4; 5; 6\};\\
&S_3 = \{7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14\};\\
&\dots\\
&S_i = \{2^i-1; 2^i; \dots; 2^{i+1}-2\};\\
&\dots\\
&S_{10} = \{1023; 1024; \dots; 2022\}.
\end{aligned}$$

Заметим, что так как чисел на доске 21, то какие-то три попали в одно множество. Выберем такие три числа a, b, c, что $b < a < c$, $a, b, c \in S_i$.

Тогда

$$\begin{aligned}
b < a;\quad c < 2a \quad &\Rightarrow \quad bc < 2a^2;\\
a < c;\quad a < 2b \quad &\Rightarrow \quad 2a^2 < 4bc.
\end{aligned}$$

Задача решена.

5. Незнайка говорит, что придумал два таких иррациональных числа a и b, что числа $a+b$ и $a+b^2$ рациональны. Могут ли его слова быть правдой?

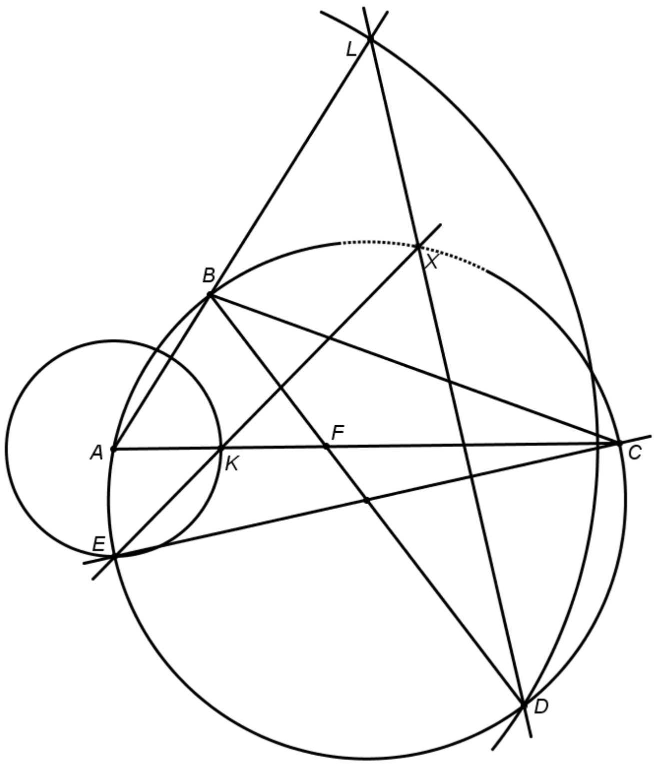
Решение. Подойдут, например, числа $a = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$ и $b = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$. Действительно,

$$a+b = \frac{1}{2}; \quad a+b^2 = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1-2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{3}{2}.$$

Ответ: Да, могут.

6. Дан тупоугольный треугольник ABC с тупым углом B. Известно, что $AC > BC > AB$. Окружность ω описана около $\triangle ABC$, BD и CE ее диаметры. Окружность с центром в точке A и радиусом AD пересекает луч AB в точке L. Окружность с центром в точке A и радиусом AE пересекает луч AC в точке K. Прямые DL и EK пересекаются в точке X. Докажите, что X лежит на окружности ω.

Решение.



Пусть углы A, B, C данного треугольника равны α, β, γ соответственно. Найдем угол EXD.

Заметим, что $\angle EAK = \angle DAL = 90^\circ$, так как опираются на диаметры окружности ω. Так как треугольники EAK и DAL равнобедренные, то

$$\angle AKE = \angle AEK = \angle ALD = \angle ADL = 45^\circ.$$

Следовательно, $\angle XKC = 45^\circ$; $\angle XDB = \angle XDA - \angle BDA = 45^\circ - \gamma$. Пусть F — точка пересечения BD и AC. Тогда $\angle AFD = \angle FAB + \angle ABF = \alpha + 90^\circ - \gamma$. Тогда из четырехугольника $KXDF$

$$\angle EXD = \angle AFD - \angle XKC - \angle XDB = \alpha + 90^\circ - \gamma - 45^\circ - 45^\circ + \gamma = \alpha.$$

Теперь заметим, что так как BD и CD диаметры окружности ω, то дуги ED и BC равны друг другу. Следовательно, дуга ED равна 2α. Так как дуга ED равна удвоенному углу EXD, то X лежит на ω, и задача решена.