

# 3 тур интернет-олимпиады СУНЦ МГУ

## Математика

7 класс

1. На доске записаны числа  $1, 2, \dots, 2022$ . Кристина может выбрать любые два числа на доске и уменьшить каждое из них на одну и ту же величину так, чтобы оба числа остались целыми неотрицательными. Найдите минимальную возможную сумму чисел, которые могли остаться на доске после действий Кристины.
2. Дано 65 различных натуральных чисел, не превосходящих 2022. Докажите, что из них можно выбрать такие 4 числа  $a, b, c, d$ , что  $a + b - c - d$  делится на 2022.
3. В государстве  $n \geq 2$  городов, каждый город соединен дорогой хотя бы с одним другим. Король хочет назвать некоторые города большими, а остальные — маленькими. Докажите, что он может так это сделать, что большими окажутся не более  $n/2$  городов, а каждый маленький город соединен дорогой хотя бы с одним большим.
4. Для трех положительных чисел  $a, b, c$ , таких что  $a + b + c = 1$ , докажите неравенство:

$$\sqrt{\frac{ab}{ab+c}} + \sqrt{\frac{bc}{bc+a}} + \sqrt{\frac{ca}{ca+b}} \leq \frac{3}{2}.$$

5. Обозначим за  $s(n)$  сумму цифр числа  $n$ . Например,  $s(5) = 5$ , а  $s(124) = 1 + 2 + 4 = 7$ . Найдите все такие пары натуральных чисел  $(a, b)$ , что  $a > b$ , а числа  $\frac{a+s(b)}{b}$  и  $\frac{b+s(a)}{a}$  целые.
6. Равносторонний треугольник со сторонами, равными  $n$ , разбит на правильные треугольнички со сторонами 1. Семен провел ломаную, звенья которой проходят вдоль отрезков разбиения. Эта ломаная прошла через все вершины разбиения ровно по одному разу. Какое наименьшее число звеньев могла иметь такая ломаная?

Например, ломаная на картинке удовлетворяет условиям и имеет 10 звеньев.

