3 тур интернет-олимпиады СУНЦ МГУ, решения

Математика

7 класс

1. На доске записаны числа 1, 2, ..., 2022. Кристина может выбрать любые два числа на доске и уменьшить каждое из них на одну и ту же величину так, чтобы оба числа остались целыми неотрицательными. Найдите минимальную возможную сумму чисел, которые могли остаться на доске после действий Кристины.

Решение. Заметим, что изначальная сумма всех чисел $\frac{2022 \cdot 2023}{2}$ — нечетное число. Так как каждым действием Кристина уменьшает эту сумму на четное число, то сумма всегда будет оставаться нечетной. Поэтому в итоге девочка не сможет получить сумму меньше 1.

Покажем, как действовать Кристине, чтобы получить набор из 2021-го нуля и одной единицы. Пусть первые 1011 действий будут следующие: $(1, 2) \to (0, 1)$, $(3, 4) \to (0, 1)$, $(5, 6) \to (0, 1)$, ..., $(2021, 2022) \to (0, 1)$. После этих действий на доске 1011 нулей и 1011 единиц. Теперь разобьем все единицы кроме одной на 505 пар и к каждой паре применим операцию $(1, 1) \to (0, 0)$. Мы получили желаемый набор чисел с суммой 1.

2. Дано 65 различных натуральных чисел, не превосходящих 2022. Докажите, что из них можно выбрать такие 4 числа a, b, c, d, что $a + b - c - d$ делится на 2022.

Решение. Обозначим за M множество данных чисел. Рассмотрим всевозможные пары чисел $\{a, b\}$, такие что $a \in M$, $b \in M$ и $a \neq b$. При этом пары $\{a, b\}$ и $\{b, a\}$, отличающиеся только порядком элементов, будем считать одинаковыми.

Посчитаем количество таких пар. Выберем сначала элемент a. Это можно сделать 65 способами. Для каждого такого способа существует 64 способа добавить элемент b. Итого у нас $65 \cdot 64$ пар. Но каждая пара посчитана дважды, ведь мы договорились не различать пары $\{a, b\}$ и $\{b, a\}$. Поэтому полученное число нужно разделить на 2, и искомое число пар $65 \cdot 64/2 = 2080$.

Так как $2080 > 2022$, то найдутся две различные пары $\{a, b\}$ и $\{c, d\}$, такие что числа $a + b$ и $c + d$ дают одинаковые остатки при делении на 2022. Это значит, что $a + b - c - d$ делится на 2022, что нам и требовалось.

Остается проверить, что все четыре числа различны. Действительно, $a \neq b$ и $c \neq d$, так как мы изначально выбирали пары различных чисел. Предположим, что $a = c$. Тогда $a+b-c-d = b-d$ делится на 2022. Но числа b и d натуральные и не превосходят 2022, поэтому $-2022 < b - d < 2022$. Следовательно $b - d$ может делиться на 2022 только если $b - d = 0$, то есть $b = d$. Но тогда пары $\{a, b\}$ и $\{c, d\}$ совпадают, а мы выбирали их различными. Значит, случай $a = c$ невозможен. Аналогично проверяется, что $a \neq d$, $b \neq c$ и $b \neq d$.

3. В государстве $n \geqslant 2$ городов, каждый город соединен дорогой хотя бы с одним другим. Король хочет назвать некоторые города большими, а остальные — маленькими. Докажите, что он может так это сделать, что большими окажутся не более $n/2$ городов, а каждый маленький город соединен дорогой хотя бы с одним большим.

Решение. Разобьем все города на компоненты связности: два города A и B принадлежат одной компоненте, если из A можно добраться до B, двигаясь по дорогам. Покажем, что в каждой компоненте можно назвать большими не более половины городов так, что из каждого из остальных (маленьких) ведет хотя бы одна дорога в большой.

Рассмотрим произвольную компоненту и произвольный город A в ней. Назовем город A городом первого уровня. Назовем городами второго уровня все города, соединенные дорогой с A. Назовем городами третьего уровня все города, из которых можно добраться до A по двум дорогам, но нельзя по одной. Назовем городами четвертого уровня все города, из которых можно добраться до A по трем дорогам, но нельзя по меньшему числу дорог. И так далее, назовем городами i-го уровня все города, из которых можно добраться до A по $i-1$ дорогам, но нельзя по меньшему числу дорог. В какой-то момент все города нашей компоненты окажутся распределены по уровням.

Заметим, что у нас имеется не менее двух уровней (ведь по условию из A идет хотя бы одна дорога). Заметим также, что каждый город четного уровня соединен дорогой хотя бы с одним городом нечетного уровня и наоборот, каждый город нечетного уровня соединен дорогой хотя бы с одним городом четного уровня. Действительно, город первого уровня A соединен дорогой с городом (или городами) второго уровня, а любой город i-го уровня при $i > 1$ соединен дорогой хотя бы с одним городом $(i-1)$-го уровня.

Пусть в нашей компоненте k городов. Тогда либо на четных уровнях не более $k/2$ городов, либо на нечетных. В первом случае назовем большими города четных уровней, а маленькими — нечетных уровней, во втором случае — наоборот. Очевидно, для нашей компоненты выполнено условие задачи.

Проведя такие же рассуждения для каждой компоненты связности, получим требуемое разбиение городов на большие и маленькие.

4. Для трех положительных чисел a, b, c, таких что $a+b+c=1$, докажите неравенство:

$$\sqrt{\frac{ab}{ab+c}}+\sqrt{\frac{bc}{bc+a}}+\sqrt{\frac{ca}{ca+b}} \leqslant \frac{3}{2}.$$

Решение. Преобразуем первое слагаемое левой части:

$$\sqrt{\frac{ab}{ab+c}}=\sqrt{\frac{ab}{ab+c(a+b+c)}}=\sqrt{\frac{ab}{ab+ac+bc+c^2}}=\sqrt{\frac{ab}{(a+c)(b+c)}}.$$

Так как по неравенству о средних $\sqrt{xy} \leqslant (x+y)/2$, то

$$\sqrt{\frac{ab}{ab+c}} = \sqrt{\frac{ab}{(a+c)(b+c)}} \leqslant \left(\frac{a}{a+c} + \frac{b}{b+c}\right)/2.$$

Аналогично,

$$\sqrt{\frac{bc}{bc+a}} \leqslant \left(\frac{c}{a+c} + \frac{b}{a+b}\right)/2 \quad \text{и} \quad \sqrt{\frac{ca}{ca+b}} \leqslant \left(\frac{c}{b+c} + \frac{a}{a+b}\right)/2.$$

Сложив три полученные неравенства, получаем требуемое.

5. Обозначим за $s(n)$ сумму цифр числа n. Например, $s(5) = 5$, а $s(124) = 1 + 2 + 4 = 7$. Найдите все текие пары натуральных чисел (a, b), что $a > b$, а числа $\frac{a+s(b)}{b}$ и $\frac{b+s(a)}{a}$ целые.

Решение. Запишем требуемое условие в виде

$$a + s(b) = rb; \quad b + s(a) = ta; \quad r, t \in \mathbb{Z}.$$

Заметим, что $s(a) \leqslant a$. Следовательно, $0 < b + s(a) < 2a$, а значит $t = 1$:

$$b + s(a) = a. \tag{1}$$

Заметим также, что $a + s(b) > b + s(b) > b$, то есть $r \geqslant 2$:

$$a + s(b) \geqslant 2b. \tag{2}$$

Разберем три случая.

I случай. Число a однозначное.

Заметим, что $s(a) = a$ и равенство (1) невозможно. Значит, первый случай невозможен.

II случай. В числе a хотя бы 3 цифры.

Рассмотрим десятичную запись чисел a и b:

$$a = \overline{a_1 a_2 \ldots a_n}, \quad b = \overline{b_1 b_2 \ldots b_m}.$$

В нашем случае $n \geqslant 3$.

Запишем цепочку неравенств:

$$\begin{aligned} a &= 10^{n-1}a_1 + 10^{n-2}a_2 + 10^{n-3}a_3 + \cdots + 10a_{n-1} + a_n \\ &\geqslant 100a_1 + 10a_2 + 10a_3 + \cdots + 10a_{n-1} + a_n \\ &\geqslant (10a_1 + 90) + 10a_2 + 10a_3 \cdots + 10a_{n-1} + a_n \\ &> 10a_1 + 10a_2 + 10a_3 + 10a_{n-1} + 10a_n \\ &= 10s(a). \end{aligned}$$

Итак, $a > 10s(a)$. Так как всилу (1) $10b + 10s(a) = 10a$, то $9a < 10b$. Вспомним теперь, что $a + s(b) \geqslant 2b$. Запишем:

$$18b \leqslant 9a + 9s(b) < 10b + 9s(b) \Rightarrow 8b < 9s(b)$$

Заметим, что последнее неравенство возможно только если b однозначное число. Действительно, если $b \geqslant 10$, то

$$\begin{aligned} 8b &= 8(10^{m-1}b_1 + 10^{m-2}b_2 + \dots + 10b_{m-1} + b_m) \\ &\geqslant 80b_1 + 80b_2 + \dots + 80b_{m-1} + 8b_m \\ &\geqslant (9b_1 + 71) + 9b_2 + \dots 9b_{m-1} + 8b_m \\ &> 9b_1 + 9b_2 + \dots 9b_{m-1} + 9b_m \\ &= 9s(b). \end{aligned}$$

Итак, число b однозначное. Тогда $9a < 10b \leqslant 90$. Но последнее неравенство невозможно, так как в нашем случае в числе a хотя бы 3 цифры, то есть $a \geqslant 100$. Итак, II случай тоже не возможен.

Остался последний случай.

III случай. Число a двузначное.

Запишем a в виде $10a_1 + a_2$. Тогда всилу (1) $b = 9a_1$. Так как $b < a$, то b либо однозначное, либо двузначное. Все кроме одного однозначные и двузначные числа, делящиеся на 9, имеют сумму цифр 9. Исключение составляет число 99, но $b < a \leqslant 99$, следовательно $s(b) = 9$.

Теперь оценим число r. Запишем:

$$9a_1(r-1) = b(r-1) = a + s(b) - b = a_1 + a_2 + 9 \leqslant a_1 + 18 \leqslant 19a_1.$$

Следовательно, $r = 2$ или $r = 3$.

Если $r = 2$, то

$$9a_1 = a_1 + a_2 + 9 \Rightarrow a_1 = \frac{a_2 + 9}{8}.$$

Так как a_1 целое и $9 \leqslant a_2 + 9 \leqslant 18$, то $a_1 = 2$ и $a_2 = 7$. Получаем $a = 27$; $b = 9a_2 = 18$.

Если $r = 3$, то

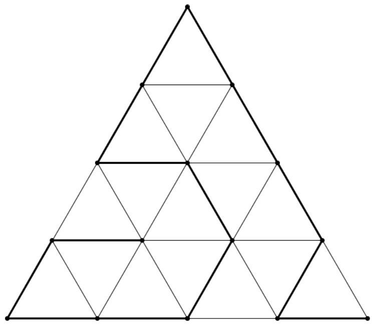
$$18a_1 = a_1 + a_2 + 9 \Rightarrow a_1 = \frac{a_2 + 9}{17}.$$

Так как a_1 целое и $9 \leqslant a_2 + 9 \leqslant 18$, то $a_1 = 1$ и $a_2 = 8$. Получаем $a = 18$; $b = 9a_2 = 9$.

Ответ: $(18, 9); (27, 18)$.

6. Равносторонний треугольник со сторонами, равными n, разбит на правильные треугольнички со сторонами 1. Семен провел ломаную, звенья которой проходят вдоль отрезков разбиения. Эта ломаная прошла через все вершины разбиения ровно по одному разу. Какое наименьшее число звеньев могла иметь такая ломаная?

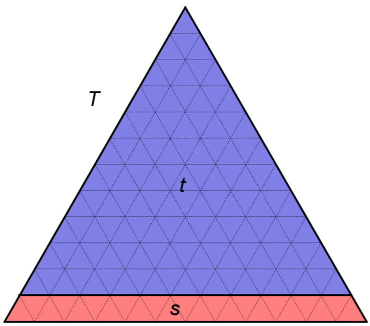
Например, ломаная на картинке удовлетворяет условиям и имеет 10 звеньев.



Решение.

Лемма. *Пусть равносторонний треугольник со сторонами, равными n, разбит на правильные треугольнички со сторонами 1. Пусть k отрезков (необязательно составляющие ломаную и необязательно идущие по линиям разбиения) проходят через все вершины разбиения. Тогда $k > n$.*

Докажем утверждение леммы индукцией по n. База для $n = 1$ очевидна. Пусть утверждение верно для $n - 1$, проверим его для n. Пусть дан правильный треугольник T со стороной n. Разобьем его на правильный треугольник t со стороной $n - 1$ и трапецию s (см. рис.).



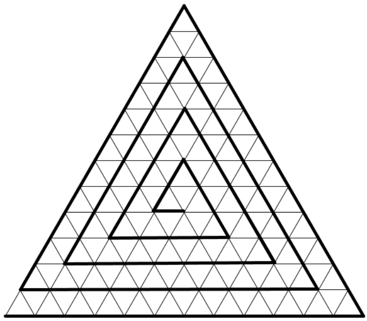
Вершины разбиения треугольника T — это вершины разбиения треугольника t (назовем их синими) и $n + 1$ вершина, разбивающая большее основание s (назовем их красными).

Пусть мы выбрали какие-то k отрезков, покрывающих все вершины разбиения T. Докажем, что $k > n$. Рассмотрим два случая.

Случай 1. Никакой отрезок из выбранных не проходит через две красные вершины. Тогда всего отрезков не меньше, чем красных вершин, то есть $k \geqslant n + 1 > n$, и случай разобран.

Случай 2. По крайней мере один из выбранных отрезков содержит не менее двух красных вершин. Назовем такой отрезок I (если таких отрезков несколько, то назовем I любой из них). Тогда I не может содержать ни одной синей вершины. Рассмотрим все отрезки, каждый из которых проходит хотя бы через одну синюю вершину. По предположению индукции таких отрезков больше чем $n-1$, а также среди них нет I. Значит вместе с I получится больше чем n, и второй случай тоже разобран. Лемма доказана.

Из леммы следует, что не существует требуемой ломаной из n или менее звеньев. На рисунке приведен пример ломаной, для которой достигается значение $n+1$. Здесь $n=12$, для других n пример строится аналогично.



Ответ: $n+1$.