

3 тур интернет-олимпиады СУНЦ МГУ

Математика

9 класс

1. На доске написаны все натуральные числа от 1 до 8. Гриша пишет на доске числа по следующему правилу: он выбирает два числа x и y , которые написаны на доске (возможно, в качестве x и y он берёт одно и то же число) и пишет число $2xy - 3x + 16y$. Докажите, что он никогда не получит никакие степени двойки кроме тех, которые уже написаны.
2. Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и D . Прямая l_1 пересекает окружность ω_1 в точках A и B и касается окружности ω_2 . Прямая l_2 пересекает окружность ω_2 в точках A и C и касается окружности ω_1 . Докажите, что BC является общей касательной окружностей тогда и только тогда, когда радиусы ω_1 и ω_2 одинаковы и равны длине отрезка AD .
3. Докажите, что площадь любого выпуклого многоугольника строго меньше квадрата его периметра, делённого на 8.
4. Чего больше: 2022-значных точных квадратов или нулей в записи всех чисел, записывающихся не более чем 1009 цифрами?
5. Пафнутий написал на доске два различных непостоянных линейных двучлена с целыми неотрицательными коэффициентами, причём у каждого двучлена соседние коэффициенты отличались на 1. Антуан перемножил эти многочлены, а Алиса сказала, что получившийся многочлен принимает одно и то же значение в двух целых числах, отличающихся на 1. Может ли быть, что никто из них не ошибся?