

3 тур интернет-олимпиады СУНЦ МГУ

Математика

9 класс

1. На доске написаны все натуральные числа от 1 до 8. Гриша пишет на доске числа по следующему правилу: он выбирает два числа x и y , которые написаны на доске (возможно, в качестве x и y он берёт одно и то же число) и пишет число $2xy - 3x + 16y$. Докажите, что он никогда не получит никакие степени двойки кроме тех, которые уже написаны.

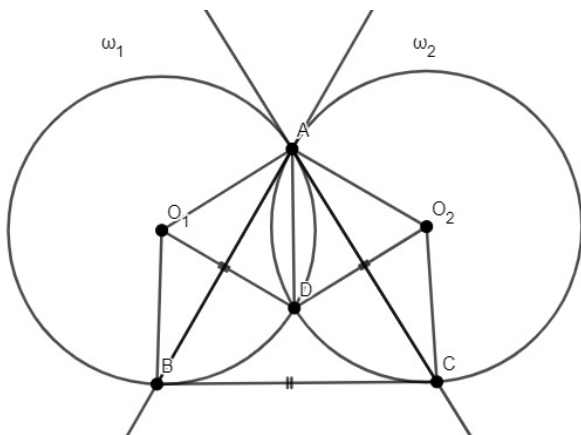
Решение. Докажем более сильное утверждение: Гриша никогда не получит ни одно число, кратное 16.

От противного: пусть $16k$ — первое из чисел, кратных 16, которое получил Гриша. Тогда $16k = 2xy - 3x + 16y$, где x и y не делятся на 16. Преобразуя это равенство, получим: $16(k - y) = x(2y - 3)$. Максимально возможная степень вхождения двойки в правую часть — такая же, как в число x (поскольку число $2y - 3$ нечётно), то есть третья, поэтому правая часть не может делиться на 16. Противоречие.

2. Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и D . Прямая l_1 пересекает окружность ω_1 в точках A и B и касается окружности ω_2 . Прямая l_2 пересекает окружность ω_2 в точках A и C и касается окружности ω_1 . Докажите, что BC является общей касательной окружностей тогда и только тогда, когда радиусы ω_1 и ω_2 одинаковы и равны длине отрезка AD .

Решение. Пусть сначала BC является общей касательной к окружностям ω_1 и ω_2 . Тогда $CA = CB$ как отрезки касательных к окружности ω_1 , проведённые из одной точки; аналогично, $BA = BC$ как отрезки касательных к окружности ω_2 , проведённые из одной точки. Стало быть, треугольник ABC равносторонний.

Пусть O_1 — центр окружности ω_1 , а O_2 — центр окружности ω_2 .



Угол $\angle ACB$, равный 60° — это угол между хордой и касательной окружности ω_2 , стало быть, дуга AC равна 120° . Треугольник O_2AC — равнобедренный с углом 120° при вершине, поэтому $O_2A = \frac{AC}{\sqrt{3}} = r$. Аналогично, радиус окружности ω_1 равен $O_1A = \frac{AB}{\sqrt{3}} = r$, и $O_1A = O_2A = r$ — радиусы равны.

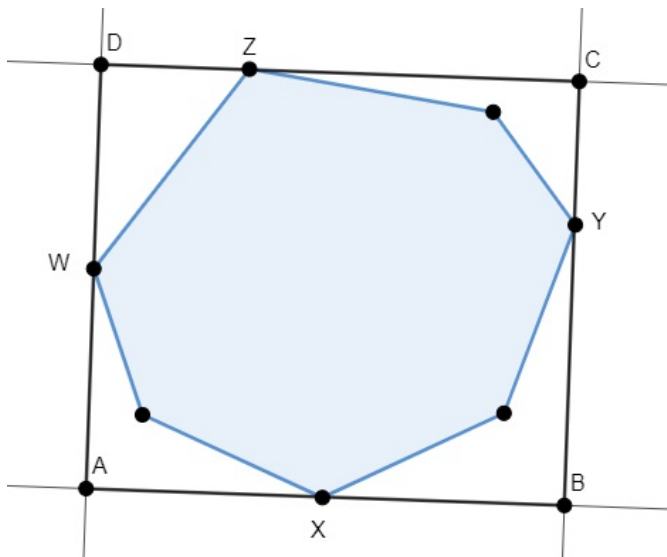
Осталось доказать, что отрезок AD равен по длине радиусам окружностей ω_1 и ω_2 . Четырёхугольник O_1AO_2D — ромб со стороной r , причём $\angle O_1AO_2 = \angle O_1AB + \angle BAC = \angle CAO_2 = 30^\circ + 60^\circ + 30^\circ = 120^\circ$, а поэтому $\angle AO_1D = 60^\circ$. Значит, треугольник AO_1D — равнобедренный с углом 60° , то есть равносторонний, и $AD = O_1A = r$.

Обратно: пусть радиусы окружностей ω_1 и ω_2 равны r и равны длине отрезка AD . Четырёхугольник O_1AO_2D — ромб с углом 60° (так как треугольник AO_1D равносторонний). Касательная к окружности перпендикулярна радиусу, опущенному в точку касания, поэтому $\angle O_1AC = 90^\circ$ и $\angle O_2AC = 30^\circ$. Треугольник AO_2C — равнобедренный с углом $\angle AO_2C = 120^\circ$. Кроме того, O_1AO_2 — также равнобедренный и $\angle O_1AO_2 = 120^\circ$, откуда $\angle AO_2O_1 = 30^\circ$ и $\angle O_1O_2C = \angle AO_2C - \angle AO_2O_1 = 90^\circ$. Аналогично, $\angle BO_1O_2 = 90^\circ$.

Четырёхугольник BO_1O_2C имеет два прямых угла $\angle O_1O_2C$ и $\angle BO_1O_2$, а стороны O_1B и O_2C равны. Значит, это прямоугольник, поэтому $BC \perp O_1B$ и $BC \perp O_2C$. Отсюда BC — общая касательная для ω_1 и ω_2 .

3. Докажите, что площадь любого выпуклого многоугольника строго меньше квадрата его периметра, делённого на 8.

Решение. Выберем произвольным образом два перпендикулярных направления и опишем вокруг данного выпуклого многоугольника четырёхугольник $ABCD$ со сторонами, параллельными данным направлениям:



Пусть $AB = CD = x$, $BC = AD = y$: тогда площадь S нашего многоугольни-

ка (он целиком содержится в прямоугольнике!) не превосходит величины $x \cdot y$. Более того: если выбрать направления сторон прямоугольника не параллельными ни одной из сторон многоугольника, получим $S < x \cdot y$.

Обозначим вершины многоугольника, принадлежащие сторонам AB, BC, CD и DA буквами X, Y, Z и W , соответственно (условие выпуклости вместе с условием о непараллельности сторон прямоугольника $ABCD$ сторонам многоугольника гарантирует, что на каждой стороне прямоугольника лежит лишь одна сторона многоугольника). Для периметра исходного многоугольника верно неравенство $P \geq XY + YZ + ZW + WX$.

Рассмотрим треугольник WAX : $WX^2 = WA^2 + AX^2 \geq \frac{WA^2 + 2WA \cdot AX + AX^2}{2} = \left(\frac{WA + AX}{\sqrt{2}}\right)^2$, а поэтому $WX \geq \frac{WA + AX}{\sqrt{2}}$.

Аналогично получим неравенства и для других отрезков XY, YZ, ZW . Итого: $P \geq XY + YZ + ZW + WX \geq \frac{XB + BY + YC + CZ + ZD + DW + WA + AX}{\sqrt{2}} = \frac{2(x+y)}{\sqrt{2}}$. Или для квадрата: $P^2 \geq 2(x+y)^2$.

Наконец, по неравенству о средних $\sqrt{x \cdot y} \leq \frac{x+y}{2}$, а следовательно $x \cdot y \leq \frac{(x+y)^2}{4}$. Совмещая все полученные неравенства, имеем:

$$S < x \cdot y \leq \frac{(x+y)^2}{4} = \frac{1}{8} \cdot 2(x+y)^2 \leq \frac{P^2}{8}.$$

4. Чего больше: 2022-значных точных квадратов или нулей в записи всех чисел, записывающихся не более чем 1009 цифрами?

Решение. Количество нулей больше.

Пусть A — количество 2022-значных точных квадратов, а B — количество нулей в записи всех чисел, записывающихся не более чем 1009 цифрами. Оценим величины A и B .

2022-значные точные квадраты — это такие числа n^2 , что $10^{2021} \leq n^2 < 10^{2022}$, отсюда $10^{1010} \sqrt{10} < n < 10^{1011}$. Усилим это неравенство: все числа n , которые нам подходят, удовлетворяют условию $3 \cdot 10^{1010} < n < 10 \cdot 10^{1010}$ (при этом не все эти n нам подходят!), а следовательно таких чисел меньше, чем $10 \cdot 10^{1010} - 3 \cdot 10^{1010}$. Итого: $A < 3 \cdot 10^{1010}$.

Вместо чисел, записывающихся не более чем 1009 цифрами, рассмотрим сперва числа, записывающиеся ровно 1009 цифрами. Их можно представлять в виде строк $(b, a_1, a_2, \dots, a_{1008})$, где b может принимать значения от 1 до 9, а каждое из a_i — любое значение от 0 до 9. Рассмотрим сначала только строки $(a_1, a_2, \dots, a_{1008})$: их 10^{1008} , и в каждой по 1008 цифр, значит, всего в них $1008 \cdot 10^{1008}$ цифр. Докажем, что каждая из цифр суммарно встречается одинаковое количество раз.

Рассмотрим множество всех строк, в которых встречается цифра 0 или цифра 1, и разобьём все такие строки на пары: поставим в пару каждой строке такую,

в которой все единицы заменены на нули, а все нули — на единицы. Ясно, что в каждой паре строк будет равное количество нулей и единиц; значит, во всём нашем множестве строк нулей и единиц поровну. Точно так же доказывается, что каждая из цифр суммарно встречается одинаковое количество раз, то есть $1008 \cdot 10^{1007}$.

Теперь вернёмся к строкам вида $(b, a_1, a_2, \dots, a_{1008})$: каждой "короткой" строке $(a_1, a_2, \dots, a_{1008})$ соответствует 9 строк вида $(b, a_1, a_2, \dots, a_{1008})$, а значит, в них цифра 0 суммарно встречается $9 \cdot 1008 \cdot 10^{1007} = 9072 \cdot 10^{1007}$ раз. Таким образом, даже не учитывая менее чем 1009-значные числа, получаем оценку на B : $B > 9072 \cdot 10^{1007} > 9 \cdot 10^{1010}$. Сравнивая с неравенством для A , имеем: $B > 9 \cdot 10^{1010} > 3 \cdot 10^{1010} > A$.

5. Пафнутий написал на доске два различных непостоянных линейных двучлена с целыми неотрицательными коэффициентами, причём у каждого двучлена соседние коэффициенты отличались на 1. Антуан перемножил эти многочлены, а Алиса сказала, что получившийся многочлен принимает одно и то же значение в двух целых числах, отличающихся на 1. Может ли быть, что никто из них не ошибся?

Решение. Предположим, что никто не ошибся.

Непостоянность двучленов означает, что их произведение — квадратный трёхчлен. Исследуем, когда квадратный трёхчлен принимает в соседних целых числах одинаковое значение:

Пусть $f(x) = ax^2 + bx + c$. Тогда $f(x+1) = a(x+1)^2 + b(x+1) + c = ax^2 + 2ax + a + bx + 1$, и из условия $f(x) = f(x+1)$ следует, что $2ax + a + b = 0$. Таким образом, если никто не ошибся, $x - \frac{a+b}{2a}$ — целое число. В частности, число $a + b$ должно быть чётным, значит, числа a и b — разных знаков.

Вернёмся теперь к линейным двучленам. Существуют следующие возможности:

- Оба двучлена имеют нечётные коэффициенты перед x и, соответственно, чётные свободные члены. Тогда коэффициент перед x^2 в их произведении нечётный, а перед x — чётный. Такой случай нам не подходит.
- Двучлены имеют коэффициенты разной чётности перед x , а стало быть и свободные члены разной чётности. Тогда коэффициент перед x^2 в их произведении чётный, а перед x — нечётный. Такой случай нам также не подходит.
- Оба двучлена имеют чётные коэффициенты перед x и, соответственно, нечётные свободные члены. Тогда и коэффициент перед x^2 , и коэффициент перед x в их произведении чётные, а перед x — чётный. Такие двучлены могут подойти.

Пусть коэффициент (чётный) перед x у первого двучлена равен $2m$, а у второго — $2n$. Тогда они могут быть записаны в виде $2mx + 2m + (-1)^k$ и $2nx +$

$2m + (-1)^l$, а их произведение равно $4mnx^2 + (8mn + 2 \cdot (-1)^l m + 2 \cdot (-1)^k n)x + \dots$ (свободный член нас здесь не интересует). Целым должно быть выражение

$$\begin{aligned}\frac{a+b}{2a} &= \frac{4mn + 8mn + 2 \cdot (-1)^l m + 2 \cdot (-1)^k n}{8mn} = \\ &= 1 + \frac{2mn + (-1)^l m + (-1)^k n}{4mn},\end{aligned}$$

для чего, в частности, число $(-1)^l m + (-1)^k n$ должно делиться на $2mn$. Но $|(-1)^l m + (-1)^k n| \leq |m| + |n| \leq mn + mn = 2mn$, и равенство достигается только в случае $m = n$ и $(-1)^k = (-1)^l$. Стало быть, исходные двучлены были равны. Противоречие с условием.