

3 тур интернет-олимпиады СУНЦ МГУ

Математика

10 класс

1. На доске написаны все натуральные числа от 1 до 8. Гриша пишет на доске числа по следующему правилу: он выбирает два числа x и y , которые написаны на доске (возможно, в качестве x и y он берёт одно и то же число) и пишет число $2xy - 3x + 16y$. Найдите наименьшее натуральное число, которое никогда не появится на доске.
2. Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и D . Прямая l_1 пересекает окружность ω_1 в точках A и B и касается окружности ω_2 . Прямая l_2 пересекает окружность ω_2 в точках A и C и касается окружности ω_1 . Докажите, что точка B , точка C и точка D лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда $\angle BAC = 90^\circ$.
3. Чего больше: 2022-значных точных квадратов или единиц в записи всех чисел, записывающихся не более чем 1009 цифрами?
4. Фиксируем три различных простых числа p , q и r . Дан набор, состоящий из всевозможных чисел $p^a q^b r^c$, где $a + b + c \leq n$. Из этого набора выбрали $\frac{n^2 + 3n + 4}{2}$ различных чисел. Докажите, что среди выбранных чисел обязательно есть два таких, что одно из них делится на другое.
5. Рома и Маргарита играют в игру. В начале игры они должны последовательно нарисовать на доске по тупоугольному треугольнику, причём Маргарита рисует треугольник, который не подобен треугольнику Ромы. В свой ход игрок выбирает любой из двух нарисованных на доске треугольников, вписывает в него окружность и строит новый треугольник с вершинами в точках касания этой окружности исходного треугольника. После этого исходный треугольник и окружность стираются, а на доске опять остаётся два треугольника. Игроки ходят по очереди. Побеждает тот, кто первым нарисует треугольник, все углы которого отличаются от углов правильного менее, чем на 1 градус. Рома ходит первым. Кто из них гарантированно может выиграть, как бы ни играл соперник, и почему?