3 тур интернет-олимпиады СУНЦ МГУ

Математика

10 класс

1. На доске написаны все натуральные числа от 1 до 8. Гриша пишет на доске числа по следующему правилу: он выбирает два числа x и y, которые написаны на доске (возможно, в качестве x и y он берёт одно и то же число) и пишет число $2xy-3x+16y$. Найдите наименьшее натуральное число, которое никогда не появится на доске.

Решение. Докажем утверждение: Гриша никогда не получит ни одно число, кратное 16.

От противного: пусть $16k$ — первое из чисел, кратных 16, которое получил Гриша. Тогда $16k = 2xy - 3x + 16y$, где x и y не делятся на 16. Преобразуя это равенство, получим: $16(k-y) = x(2y-3)$. Максимально возможная степень вхождения двойки в правую часть — такая же, как в число x (поскольку число $2y-3$ нечётно), то есть третья, поэтому правая часть не может делиться на 16. Противоречие.

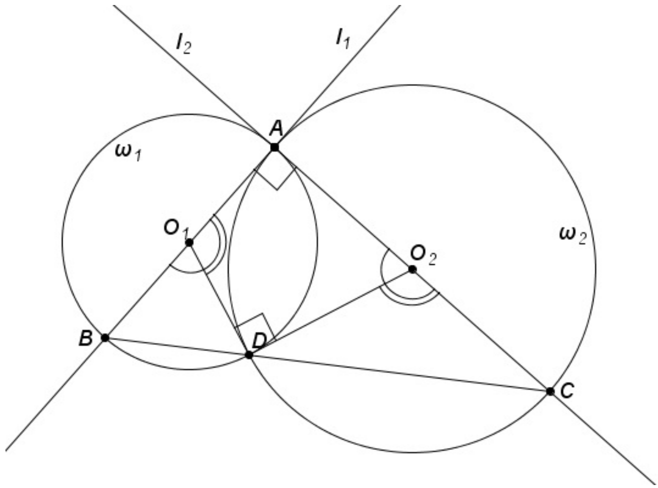
Теперь покажем, что 16 — минимальное из чисел, коотрые нельзя получить. Для этого явно покажем, как получить любое из натуральных чисел, меньших 16. Положим $y = 1$; тогда на доске можно получить любое число вида $16 - x$. Подставляя значения x, равные $7, 6, ..., 1$, мы последовательно получим все числа от 9 до 15 включительно.

2. Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и D. Прямая l_1 пересекает окружность ω_1 в точках A и B и касается окружности ω_2. Прямая l_2 пересекает окружность ω_2 в точках A и C и касается окружности ω_1. Докажите, что точка B, точка C и точка D лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда $\angle BAC = 90°$.

Решение. Пусть для начала угол $\angle BAC = 90°$.

Докажем, что AB и AC — диаметры окружностей ω_1 и ω_2, соответственно. Действительно: хорда AB перпендиуклярна касательной AC окружности ω_1, а хорда AC перпендиуклярна касательной AB окружности ω_2, потому они являются диаметрами.

Пусть O_1 и O_2 — центры окружностей ω_1 и ω_2, соответственно. Четырёхугольник AO_1DO_2 — дельтоид с углом $O_1AO_2 = 90°$. Пусть $\angle AO_2D = \alpha$; тогда $\angle AO_1D = \angle DO_2C = 180° - \alpha$, и $\angle BO_1D = \alpha$.



Треугольники BO_1D и DO_2C — равнобедренные, $\angle O_1DB = 90^\circ - \frac{\angle DO_1B}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$ и $\angle O_2D = 90^\circ - \frac{\angle DO_2}{2} = 90^\circ - \frac{180^\circ - \alpha}{2} = \frac{\alpha}{2}$. Отсюда $\angle BDC = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} + 90^\circ + \frac{\alpha}{2} = 180^\circ$, а потому точки B, D и C лежат на одной прямой.

Обратно: предположим, точки B, C и D лежат на одной прямой, но угол $\angle BAC$ не равен 90°. Проведём диаметры AB' и AC' окружностей ω_1 и ω_2: поскольку $\angle BAC' = \angle B'AC = 90^\circ$ как угол между радиусом и касательной в точке касания, точки B' и C' не совпадают с точками B и C. По уже доказанному точки B', D и C' лежат на одной прямой, причём точка D принадлежит отрезку $B'C'$; кроме того, $\angle ABD = \angle AB'D$ и $\angle ACD = \angle AC'D$ как опирающиеся на одну дугу.

Возможны два случая:

1. $\alpha = \angle BAC < 90^\circ$. Тогда $\angle BDC = 360^\circ - \alpha - (\angle AB'D + \angle AC'D) = 360^\circ - \alpha - (\angle ABD + \angle ACD) = 360^\circ - \alpha - 180^\circ + \angle B'AC' = 180^\circ - \alpha + 180^\circ - \alpha \neq 180^\circ$, и точки B, D, C не лежат на одной прямой. Противоречие.
2. $\alpha = \angle BAC > 90^\circ$ — случай рассматривается аналогично.

3. Чего больше: 2022-значных точных квадратов или единиц в записи всех чисел, записывающихся не более чем 1009 цифрами?

Решение. Количество единиц больше.

Пусть A — количество 2022-значных точных квадратов, а B — количество единиц в записи всех чисел, записывающихся не более чем 1009 цифрами. Оценим величины A и B.

2022-значные точные квадраты — это такие числа n^2, что $10^{2021} \leqslant n^2 < 10^{2022}$; отсюда $10^{1010}\sqrt{10} < n < 10^{1011}$. Усилим это неравенство: все числа n, которые нам подходят, удовлетворяют условию $3 \cdot 10^{1010} < n < 10 \cdot 10^{1010}$ (при этом не все эти n нам подходят!), а следовательно таких чисел меньше, чем $10 \cdot 10^{1010} - 3 \cdot 10^{1010}$. Итого: $A < 3 \cdot 10^{1010}$.

Вместо чисел, записывающихся не более чем 1009 цифрами, рассмотрим сперва числа, записывающиеся ровно 1009 цифрами. Их можно представлять в виде строк $(b, a_1, a_2, ..., a_{1008}$, где b может принимать значения от 1 до 9, а каждое из a_i — любое значение от 0 до 9. Рассмотрим сначала только строки $(a_1, a_2, ..., a_{1008}$: их 10^{1008}, и в каждой по 1008 цифр, значит, всего в них $1008 \cdot 10^{1008}$ цифр. Докажем, что каждая из цифр суммарно встречается одинаковое количество раз.

Рассмотрим множество всех строк, в которых встречается цифра 0 или цифра 1, и разобьём все такие строки на пары: поставим в пару каждой строке такую, в которой все единицы заменены на нули, а все нули — на единицы. Ясно, что в каждой паре строк будет равное количество нулей и единиц; значит, во всём нашем множестве строк нулей и единиц поровну. Точно так же доказывается, что каждая из цифр суммарно встречается одинаковое количество раз, то есть $1008 \cdot 10^{1007}$.

Теперь вернёмся к строкам вида $(b, a_1, a_2, ..., a_{1008}$: каждой "короткой"строке $(a_1, a_2, ..., a_{1008}$ соответствует 9 строк вида $(b, a_1, a_2, ..., a_{1008}$, а значит, в них цифра 1 суммарно встречается более чем $9 \cdot 1008 \cdot 10^{1007} = 9072 \cdot 10^{1007}$ раз (мы не посчитали здесь единицы, которые стоят на первой позиции. Таким образом, даже не учитывая менее чем 1009-значные числа, получаем оценку на B: $B > 9072 \cdot 10^{1007} > 9 \cdot 10^{1010}$. Сравнивая с неравенством для A, имеем: $B > 9 \cdot 10^{1010} > 3 \cdot 10^{1010} > A$.

4. Фиксируем три различных простых числа p, q и r. Дан набор, состоящий из всевозможных чисел $p^a q^b r^c$, где $a+b+c \leqslant n$. Из этого набора выбрали $\frac{n^2+3n+4}{2}$ различных чисел. Докажите, что среди выбранных чисел обязательно есть два таких, что одно из них делится на другое.

Решение. Рассмотрим все возможные значения, которые может принимать пара (a, b).

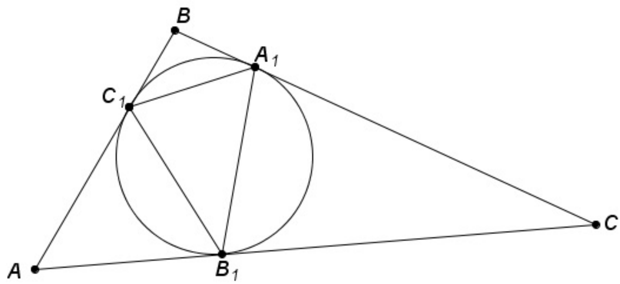
Пусть $a + b = k \leqslant n$: таких пар - $k + 1$ (это пары $(0, k), (1, k - 1), ..., (k, 0)$. Значит, всевозможных пар (a, b) с условием $a+b \leqslant n - 1+2+...+n+(n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{n^2+3n+2}{2}$, то есть на 1 меньше данного в условии числа. Поэтому среди $\frac{n^2+3n+4}{2}$ чисел обязательно найдутся такие два, у которых совпадают степени p и совпадают степени q. Пусть это числа $p^a q^b r^{c_1}$ и $p^a q^b r^{c_2}$, где $c_1 > c_2$: тогда первое из них делится на второе.

Заметим отдельно (это доказывать в задаче не требовалось), что уменьшить число из условия даже на 1 нельзя: так, среди $\frac{n^2+3n+2}{2}$ чисел вида $p^a q^b r^c$ с условием $a + b + c = n$ нет двух таких, что одно делится на другое.

5. Рома и Маргарита играют в игру. В начале игры они должны последовательно нарисовать на доске по тупоугольному треугольнику, причём Маргарита рисует треугольник, который не подобен треугольнику Ромы. В свой ход игрок выбирает любой из двух нарисованных на доске треугольников, вписывает в него окружность и строит новый треугольник с вершинами в точках касания этой окружностью исходного треугольника. После этого исходный треугольник и окружность стираются, а на доске опять остаётся два треугольника. Игроки ходят по очереди. Побеждает тот, кто первым нарисует треугольник, все углы которого отличаются от углов правильного менее, чем на 1 градус. Рома ходит первым. Кто из них гарантированно может выиграть, как бы ни играл соперник, и почему?

Решение. Выигрышная стратегия есть у Маргариты.

Сначала поймём, как зависят углы треугольника с вершинами в точках касания от углов исходного треугольника. Пусть вписанная окружность треугольника ABC касается стороны BC в точке A_1, стороны AC в точке B_1 и стороны AB — в точке C_1.



Пусть углы треугольника ABC равны $60+\alpha, 60+\beta$ и $60+\gamma$ (естественно, выполняется условие $\alpha+\beta+\gamma=0$). Прямые AB_1 и AC_1 — касательные к вписанной окружности, поэтому $60+\alpha=\angle B_1AC_1=\frac{\smile B_1C_1-\smile C_1B_1}{2}=\angle A_1C_1B_1+\angle A_1B_1C_1-\angle B_1A_1C_1$. Проделав то же рассуждение для двух оставшихся углов, получаем систему:

$$\begin{cases}60+\alpha=\angle A_1C_1B_1+\angle A_1B_1C_1-\angle B_1A_1C_1,\\ 60+\beta=\angle B_1A_1C_1+\angle A_1C_1B_1-\angle A_1B_1C_1,\\ 60+\gamma=\angle A_1B_1C_1+\angle B_1A_1C_1-\angle A_1C_1B_1.\end{cases}$$

Отсюда получаем, складывая последние два уравнения, что $2\angle B_1A_1C_1=120+\beta+\gamma=120-\alpha$ и $\angle B_1A_1C_1=60-\frac{\alpha}{2}$. Аналогично получаем, что $\angle A_1B_1C_1=60-\frac{\beta}{2}$ и $\angle A_1C_1B_1=60-\frac{\gamma}{2}$. Итак: если у исходного треугольника углы отличались от правильного на α,β и γ, то у нового треугольника они отличаются на $\frac{\alpha}{2}$, $\frac{\beta}{2}$ и $\frac{\gamma}{2}$.

Введём понятие *дефекта треугольника*: если углы треугольника равны $60+\alpha, 60+\beta$ и $60+\gamma$, то его дефект — это $max\{|\alpha|,|\beta|,|\gamma|\}$, то есть максимальное из отклонений углов от 60°. Дефект любого тупоугольного треугольника больше 30 градусов. Игра из условия задачи заканчивается, когда на доске появляется треугольник с дефектом, меньшим единицы.

Опишем теперь выигрышную стратегию для Маргариты. Пусть на первом ходе Рома нарисовал треугольник с дефектом $d_1>30$. Существует такое число

k, что $2^k \leqslant d_1 < 2^{k+1}$. Маргарита на первом ходу должна нарисовать любой тупоугольный треугольник с дефектом d_2, удовлетворяющим тому же неравенству: $2^k \leqslant d_2 < 2^{k+1}$.

Далее, пока на доске не появится треугольник с дефектом из полуинтервала $[1; 2)$, Маргарита должна на каждом шаге изменять тот треугольник, который не менял Рома; таким образом, после каждого её хода на доске будут оставаться два треугольника, дефекты которых принадлежат некоторому (одному и тому же) полуинтервалу $[2^s; 2^{s+1})$. Поскольку на каждом круге игры число s уменьшается на единицу, в какой-то момент после хода Ромы на доске появится треугольник с дефектом из множества $[1; 2)$. Выбрав этот треугольник для преобразований, Маргарита получит треугольник с дефектом из множества $[0,5; 1)$ и таким образом выиграет в игре.