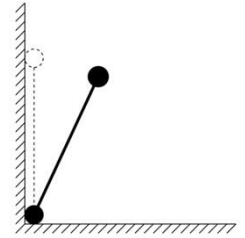


1. Гантель состоит из двух шариков одинаковой массы, соединенных невесомым стержнем. В начальный момент гантель установлена вертикально на гладкой горизонтальной поверхности и касается вертикальной стенки. Определите угол наклона гантели к вертикали, при котором гантель перестанет касаться вертикальной стенки при движении из заданного положения.



Решение

Пусть сила реакции стержня, действующая на шарики, равна T , масса каждого шарика m , скорость верхнего шарика в произвольный момент времени v , длина стержня R , а угол, который образует стержень с вертикалью, равен α . Тогда запишем второй закон Ньютона на центростремительное направление для верхнего шарика

$$m \frac{v^2}{R} = mg \cos \alpha - T$$

Из условия неподвижности нижнего шарика

$$N_B = T \sin \alpha$$

Энергия верхнего шарика сохраняется, поэтому

$$mgR = mgR \cos \alpha + \frac{mv^2}{2}$$

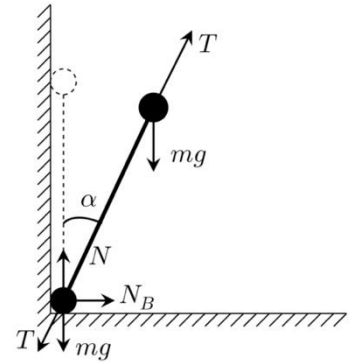
Решая совместно полученные уравнения, получим

$$N_B = mg(3 \cos \alpha - 2) \sin \alpha$$

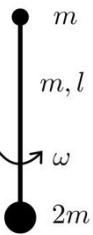
Тогда нижний шарик перестанет взаимодействовать с вертикальной стенкой при угле α : $\cos \alpha = 2/3$.

Ответ

$$\alpha = \arccos \frac{2}{3}$$



2. Система, состоящая из двух тел массами m и $2m$, соединенных массивной однородной нитью массой m и длины l , расположена на гладком горизонтальном столе. Всю систему раскрутили вокруг центра масс с угловой скоростью ω . Найдите силу натяжения нитей в точках соединения с телами.



Решение

Найдем расстояние от груза массы $2m$ до центра масс

$$x_{ц.м.} = \frac{2m \cdot 0 + m \frac{l}{2} + ml}{2m + m + m} = \frac{3}{8}l.$$

Тогда груз массы m вращается по окружности радиуса

$$r_1 = l - x_{ц.м.} = \frac{5}{8}l,$$

а груз массы $2m$ по окружности радиуса

$$r_2 = x_{ц.м.}$$

Запишем второй закон Ньютона на центростремительное направление для обоих грузов

$$\begin{aligned} m\omega^2 r_1 &= T_1 \\ 2m\omega^2 r_2 &= T_2 \end{aligned}$$

Окончательно получаем выражения для сил натяжения нити на концах

$$T_1 = \frac{5}{8} m \omega^2 l$$

$$T_2 = \frac{3}{4} m \omega^2 l$$

Ответ

$$T_1 = \frac{5}{8} m \omega^2 l$$

$$T_2 = \frac{3}{4} m \omega^2 l$$

3. Ледяной шар радиуса R при температуре $t_0 = 0^\circ \text{C}$ начинают равномерно нагревать со всех сторон. Мощность нагревателя зависит от времени t по закону $N(t) = \beta t$. Найдите время, за которое растает половина массы шара. Плотность льда ρ , удельная теплота плавления льда λ .

Решение

По определению мощности

$$N = \frac{\Delta Q}{\Delta t},$$

Тогда количество подведенного тепла

$$Q = \sum N \Delta t$$

можно найти как площадь под графиком $N(t)$:

$$Q = \frac{1}{2} \beta t^2.$$

Уравнение теплового баланса для системы

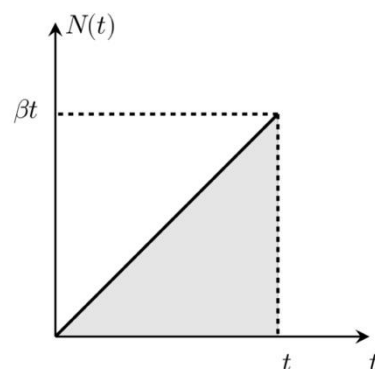
$$Q = \lambda \Delta m = \lambda \left(\rho \frac{4}{3} \pi R^3 - \frac{1}{2} \rho \frac{4}{3} \pi R^3 \right) = \frac{2}{3} \pi \lambda \rho R^3.$$

Тогда время нагревания равно

$$t = \sqrt{\frac{4\pi\lambda\rho R^3}{3\beta}}$$

Ответ

$$t = \sqrt{\frac{4\pi\lambda\rho R^3}{3\beta}}$$



4. Два одинаковых вольтметра подсоединяют к цепи как показано на рисунке. Считая источник идеальным, найдите показания вольтметров и общее сопротивление цепи во второй схеме, если в первой они равны U_1 и U_2 . Сопротивление резистора R .

Решение

ЭДС источника равно

$$\xi = U_1 + U_2.$$

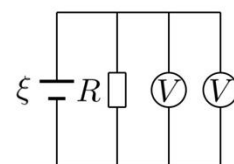
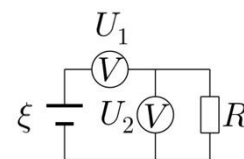
Ток, текущий через резистор равен

$$I = \frac{U_2}{R} = \frac{U_1}{R_V} - \frac{U_2}{R_V},$$

тогда сопротивление вольтметра равно

$$R_V = \frac{U_1 - U_2}{U_2} R.$$

Во второй схеме вольтметры покажут напряжение источника $U = U_1 + U_2$, а общее сопротивление цепи будет равно сопротивлению при параллельном соединении



$$R_{\text{общ}} = \frac{RR_V R_V}{RR_V + RR_V + R_V R_V} = \frac{U_1 - U_2}{U_1 + U_2} R$$

Ответ

$$U = U_1 + U_2$$

$$R_{\text{общ}} = \frac{U_1 - U_2}{U_1 + U_2} R$$

5. На главной оптической оси тонкой собирающей линзы с фокусным расстоянием F начинает двигаться равноускоренно от линзы материальная точка. Изначально тело находилось на расстоянии $2F$ от линзы. Найдите скорость изображения в тот момент, когда тело будет на расстоянии $3F$ от линзы. Ускорение материальной точки a .

Решение

Скорость тела, когда она достигнет точку на расстоянии $3F$, можно найти из формулы перемещения

$$F = \frac{v^2 - 0^2}{2a},$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{2aF}.$$

Скорость тела направлена вдоль оптической оси линзы, тогда скорость изображения будет равна

$$u = \Gamma_{\parallel} v,$$

где Γ_{\parallel} - продольное увеличение линзы. Пусть Γ_{\perp} - поперечное увеличение линзы, s - расстояние от тела до линзы, тогда

$$\Gamma_{\parallel} = \Gamma_{\perp}^2 = \left(\frac{F}{s - F} \right)^2 = \frac{1}{4}.$$

Тогда окончательно

$$u = \frac{\sqrt{2aF}}{4}.$$

Ответ

$$u = \frac{\sqrt{2aF}}{4}.$$