

2 тур интернет-олимпиады СУНЦ МГУ

Математика

9 класс

1. Фиксируем два различных простых числа p и q . Дан набор, состоящий из всевозможных чисел $p^a q^b$, где $0 \leq a \leq n, 0 \leq b \leq 2022$. Найдите минимальное такое k , что среди любых k выбранных чисел из этого набора найдутся два, одно из которых делится на другое.
2. Числа a, b и c таковы, что a является корнем трёхчлена $x^2 + 2bx + c$, b — корнем трёхчлена $x^2 + 2cx + a$ и c — корнем трёхчлена $x^2 + 2ax + b$. Найдите наибольшее возможное значение, которое может принимать сумма $a + b + c$.
3. В трёх из четырёх вершин квадрата расположены центры кругов, радиус каждого из них равен стороне квадрата. Пусть сторона квадрата равна 6. Во сколько раз площадь пересечения всех трёх кругов больше, чем $5\pi - 6\sqrt{3}$?
4. Назовём множество M (возможно, бесконечное), состоящее из многочленов, удобным, если выполнены следующие свойства:
 1. Если перемножить два многочлена (не обязательно различных), входящих в M , то получится многочлен, также входящий в M ;
 2. Графики всех многочленов из M имеют какую-то общую точку;
 3. У многочленов из M нет отрицательных коэффициентов.

Гриша заметил, что множество M — удобное, и у любых двух многочленов из M суммы коэффициентов совпадают. Алиса добавила, что не существует такого множества S , которое целиком содержит M , не совпадает с M и при этом является удобным. Найдите наибольшее из значений, принимаемых многочленами пятой степени из множества M в точке 3.

5. Дан треугольник ABC с углом C , равным 45° . D и E — точки пересечения высот треугольника ABC , опущенных из вершин A и B , с его описанной окружностью. Найдите длину отрезка DE , если $AB = \sqrt{8}$.
6. Каких четырёхзначных чисел больше и на сколько: кратных 11 или тех, сумма цифр которых равна 18? В ответ запишите разность между количеством кратных 11 и количеством чисел с суммой цифр 18 (возможно, она будет отрицательным числом).