

2 тур интернет-олимпиады СУНЦ МГУ

Математика

10 класс

1. Фиксируем два различных простых числа p и q . Дан набор, состоящий из всевозможных чисел $p^a q^b$, где $0 \leq a + b \leq 2022$. Найдите минимальное такое k , что среди любых k выбранных чисел из этого набора найдутся два, одно из которых делится на другое.
2. Числа a, b и c таковы, что a является корнем трёхчлена $x^2 + 2bx + c$, b — корнем трёхчлена $x^2 + 2cx + a$ и c — корнем трёхчлена $x^2 + 2ax + b$. Найдите наименьшее возможное значение, которое может принимать сумма $a + b + c$.
3. Парные расстояния между центрами трёх одинаковых кругов, расположенных на плоскости, равны и в $\sqrt{2}$ раз больше радиусов этих кругов. Пусть радиусы данных кругов равны 6. Во сколько раз площадь пересечения всех трёх кругов больше, чем $\sqrt{3} - 3 + \frac{\pi}{2}$?
4. Назовём множество M (возможно, бесконечное), состоящее из многочленов, удобным, если выполнены следующие свойства:
 1. Если перемножить два многочлена (не обязательно различных), входящих в M , то получится многочлен, также входящий в M ;
 2. Графики всех многочленов из M имеют какую-то общую точку;
 3. У многочленов из M нет отрицательных коэффициентов.

Гриша заметил, что множество M — удобное, и у любых двух многочленов из M суммы коэффициентов совпадают. Алиса добавила, что не существует такого множества S , которое целиком содержит M , не совпадает с M и при этом является удобным. Найдите наибольшее из значений, принимаемых многочленами 10 степени из множества M в точке 2.

5. Вершины A, C и D квадрата $ABCD$ со стороной $3\sqrt{2}$ лежат на сторонах XY , YZ и ZX треугольника XYZ , соответственно, причём весь квадрат $ABCD$ лежит внутри треугольника XYZ . Известно, что углы с вершинами в точках A, C и D между стороной квадрата и стороной треугольника принимают всего два различных значения. Пусть разность косинусов этих углов равна $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Вписанная окружность треугольника XYZ касается сторон XY и YZ в точках P и Q . Найдите отрезок PQ .
6. Михаил играет на пианино, используя только 10 фиксированных клавиш. Назовём один аккорд более звучным, чем другой, если в нем участвуют те же клавиши, что и в менее звучном, и ещё какие-то. Известно, что Михаил сыграл произведение, в котором не было одинаковых аккордов и ни один аккорд не был более звучным, чем другой. Найдите наибольшее число аккордов, которые он мог сыграть.