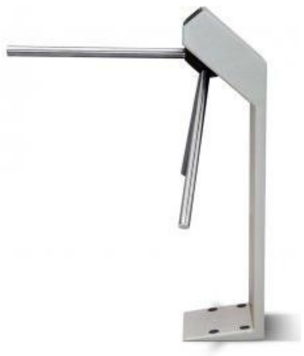
Олимпиада «Математическая реальность» (ОМаР)
Старшая (младшая) лига. 04.11.2021

Задача 1

На рисунке изображён турникет для прохода людей строго по одному. Он образован тремя планками, закреплёнными на наклонном барабане. При вращении барабана планки периодически меняются местами, оказываясь хотя бы однажды параллельными вертикальной стойке. Когда турникет находится в режиме ожидания, одна из его планок расположена горизонтально, а две другие, хотя и направлены куда-то вниз, но лежат в плоскости, которая почему-то не вертикальна (на рисунке хорошо видно, что эта плоскость не параллельна стойке).



А. Существует ли геометрическая причина, по которой указанная плоскость не вертикальна?

Б. Какой угол составляет верхняя (наклонная) часть стойки с вертикалью?

В. Найдите угол, который составляют планки друг с другом.

Г. (*Этот вопрос только для старшей лиги.*) Какой угол составляет описанная в условии плоскость с вертикалью?

Ответ: **А.** Да. **Б.** 45°. **В.** 75,5 …°. **Г.** 18,4 …°.

Решение. Планки турникета описывают коническую поверхность, в которой образующие вертятся вокруг оси, перпендикулярной наклонной плоскости барабана.

А. Плоскость, проходящая через ось вращения и стойку турникета, содержит ровно две образующие (перпендикулярные друг другу):

- горизонтальную (совпадающую с верхней планкой в состоянии ожидания);
- вертикальную (совпадающую с планкой в момент её параллельности стойке).

Проекции на эту плоскость всех остальных образующих, в том числе и две совпадающие проекции нижние планок в состоянии ожидания, оказываются уже невертикальными.

Б. Ось вращения составляет с планками (образующими конуса) угол в $90°/2 = 45°$ — такой же угол составляет и стойка со своей наклонной плоскостью.

В. Проекции планок на плоскость, параллельную плоскости барабана, скажем, длины 1, образуют между собой угол $360° : 3 = 120°$. Поэтому равнобедренный треугольник, образуемый планками, имеет стороны $\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{3}$ и угол при вершине

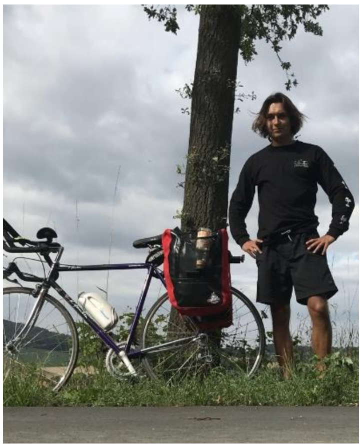
$$2\arcsin\frac{\sqrt{3}/2}{2} = 2\arcsin\frac{\sqrt{6}}{4} = 75{,}5\ldots° = \arccos\frac{1}{4} = \arccos\frac{\sqrt{2}^2 + \sqrt{2}^2 - \sqrt{3}^2}{2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}.$$

Г. Из предыдущего построения получаем, что искомый угол равен

$$45° - \operatorname{arctg}\frac{1}{2} = 45° - 26{,}5\ldots° = 18{,}4\ldots°$$

Олимпиада «Математическая реальность» (ОМаР)
Старшая (младшая) лига. 04.11.2021

Задача 2



Группа из 5 туристов собирается перебраться из одного пункта в другой по шоссе, используя имеющиеся у них 3 велосипеда. Они планируют отправиться в путь одновременно в 6:00, причём любой из тех, кто едет на велосипеде, по договорённости с остальными, может оставить его в заданном месте и пойти пешком, а тот, кто идёт пешком, может пересесть на оставленный велосипед, и такую смену способа передвижения можно проделывать несколько раз. Каждый турист идет пешком и едет на велосипеде с постоянными скоростями, причём проделывает весь путь пешком за 5 часов, а на велосипеде — за 2 часа. В какой самый ранний момент времени все туристы могут оказаться в пункте назначения? (*Для младшей лиги — велосипедов 2.*)

Ответ: 9:12 (*для младшей лиги* — 9:48).

Решение (*для младшей лиги в нём предполагаются естественные изменения: вместо времени движения* 16/5 *ч получится* 19/5 *ч и на велосипедах будут ехать, циклически сменяясь, не по 3, а по 2 туриста*). Пусть туристы занумерованы числами 1–5.

1. Сумма времён t_1, t_2, t_3, t_4, t_5 движения всех 5 туристов равна
$$2 + 2 + 2 + 5 + 5 = 16 \text{ (ч)},$$
поэтому для самого большого из этих времен имеем оценку снизу
$$\max\{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5\} \geq \frac{t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5}{5} = \frac{16}{5} = 3\frac{1}{5} \text{ (ч)}.$$

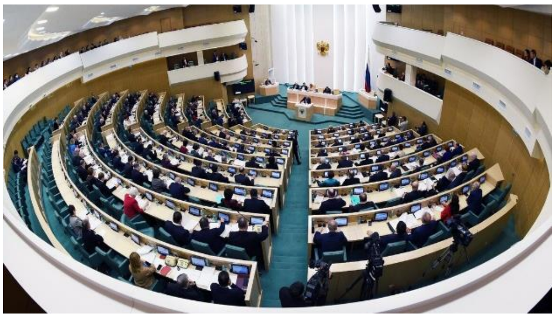
2. Равенство в этой оценке достигается, если все времена движения туристов одинаковы. Такую ситуацию можно реализовать, разбив весь путь на пять равных частей и организовав движение туристов следующим образом:

- все начинают движение ровно в 6:00;
- каждую часть пути на велосипедах едут 3 туриста (остальные идут пешком) с определёнными номерами, а именно:
  - первую часть — 1-й, 2-й и 3-й;
  - вторую часть — 2-й, 3-й и 4-й (4-й турист берёт велосипед 1-го);
  - третью часть — 3-й, 4-й и 5-й (5-й турист берёт велосипед 2-го);
  - четвёртую часть — 4-й, 5-й и 1-й (1-й турист берёт велосипед 3-го);
  - пятую часть — 5-й, 1-й и 2-й (2-й турист берёт велосипед 4-го);
- все добираются до пункта назначения ровно в 9:12.

Заметим, что при таком раскладе момент взятия каждого велосипеда следующим туристом наступает позже момента его оставления предыдущим туристом.

Олимпиада «Математическая реальность» (ОМаР)
Старшая и младшая лиги. 04.11.2021

Задача 3



На заседании сената планируется принять закон, состоящий ровно из 7 пунктов. По каждому пункту предлагается не менее 2 альтернативных формулировок, которые могут противоречить друг другу. Пункт будет считаться утверждённым в данной формулировке, если за неё проголосуют не менее k человек из всех 100 зарегистрированных на данный момент сенаторов, где k — наперёд заданное натуральное число, одинаковое для всех пунктов. Каждый сенатор перед заседанием заранее намечает для себя по одной формулировке каждого из 7 пунктов так, чтобы все вместе они образовывали непротиворечивый набор, после чего на заседании сената голосует именно за намеченные им варианты. При каком наименьшем значении k итоговый закон, если он будет принят целиком, окажется гарантированно непротиворечивым?

Ответ: 86.

Решение. Рассмотрим два случая.

1. Пусть сначала $k = 86$. Тогда если каждый пункт закона будет принят не менее чем k голосами, то против каждого пункта смогут проголосовать не более 14 сенаторов, а в общей сложности — не более $14 \cdot 7 = 98$. Поэтому обязательно найдутся $100 - 98 \geq 1$ сенатора, проголосовавшего сразу за все пункты принятого закона. Значит, набор из 7 принятых утверждений окажется непротиворечивым.

2. Пусть теперь $k < 86$. Тогда даже по k голосов за каждый из 7 пунктов может оказаться не достаточно для непротиворечивости принятого закона в целом. Действительно, пусть закон ставит целью упорядочить 7 величин $a_1, a_2, \ldots, a_7$, причём первые варианты формулировок всех 7 пунктов образуют противоречивый (циклический) список утверждений

$$a_1 < a_2, \quad a_2 < a_3, \quad \ldots, \quad a_6 < a_7, \quad a_7 < a_1,$$

а вторые варианты — те же, но с противоположными неравенствами. Пусть все 100 сенаторов разбились на 7 фракций: во фракциях с номерами 1–6 по 15 человек, а в 7-й фракции 10 человек. Допустим, что для каждого $i = 1, \ldots, 6$ сенаторы i-й фракции проголосовали за первые варианты формулировок всех пунктов, кроме пункта с номером i, в котором они поддержали второй вариант формулировки. Тогда для каждого сенатора набор его формулировок, содержащий 6 формулировок первого типа и одну — второго, непротиворечив. Однако весь принятый закон в целом, каждый пункт которого утверждён не менее чем 85 голосами, противоречив, так как состоит из формулировок только первого типа.