MATS Olympiad 2021. Senior league. Problem 1.

Начинающий футболист Василий может бежать по прямой со скоростью v_1=5 м/с, ведя мяч перед собой, и бить только по неподвижному мячу так, что он летит со скоростью v_2=10 м/с под любым углом к горизонту. Останавливаться и останавливать мяч, который он ведет, Василий может мгновенно. За какое наименьшее время Василий может переправить мяч от одной боковой линии поля до другой, если мяч, приземлившийся после полета, сразу останавливается и трогать его больше нельзя? Ширина футбольного поля 64 метра, ускорение свободного падения 10 м/с^2, сопротивление воздуха отсутствует.

Решение

Очевидно, что бежать и пускать мяч нужно перпендикулярно боковым линиям, чтобы преодолевать по горизонтали расстояние L=64 м, а не больше. Так как скорость полета мяча больше скорости ведения, имеет смысл в какой-то момент ударить по мячу, чтобы он полетел и упал на финишной черте.

Выразим время, за которое Василий переправляет мяч, как функцию угла α к горизонту, под которым запущен мяч в конце пути:

$$T = \frac{L - v_2^2 \sin 2\alpha / g}{v_1} + \frac{2 v_2 \sin\alpha}{g} \qquad (1)$$

Найдем минимум этой функции на отрезке $\alpha \in [0; \pi/2]$. Вычислим производную

$$\frac{dT}{d\alpha} = \frac{v_2}{g}\left[-2\frac{v_2}{v_1}\cos 2\alpha + 2\cos\alpha\right]$$

и приравняем ее нулю. Получим уравнение

$$n \cos 2\alpha = \cos\alpha, n = \frac{v_2}{v_1}$$

Один из его корней

$$\alpha = \arccos\frac{1+\sqrt{1+8n^2}}{4n}$$

при n>1 лежит на отрезке $[0, \pi/4]$ соответствует минимуму и имеет физический смысл. Подстановка этого значения в формулу (1) дает минимальное значение времени. Для данных числовых значений $T_{min} = 12.06c$

MATS Olympiad 2021. Senior league. Problem 2.

Школьник Василий нашел воронку, диаметр выходного отверстия которой 2 см. Ему понадобилось с помощью этой воронки налить воду в двухлитровую бутылку, горлышко которой имеет диаметр 1 см. Василий сумел закрепить воронку в вертикальном положении так, что нижний край выходного отверстия находится на высоте 45 см над горлышком бутылки, и заметил, что если все делать аккуратно, вода не проливается мимо. Определите, за какое наименьшее время Василий сможет наполнить двухлитровую бутылку с помощью такой установки, не проливая воду мимо цели.

Решение

Обозначим через U0 скорость воды на выходе из воронки. В промежутке между воронкой и бутылкой вода свободно падает, так что по закону сохранения энергии скорость на входе в бутылку $U = \sqrt{U_0^2 + 2gh}$. Так как объем воды, прошедший за единицу времени через воронку и через горлышко одинаков, имеет место равенство:

$$U_0\frac{\pi D^2}{4} = U\frac{\pi d_1^2}{4} \Leftrightarrow U_0 D^2 = \sqrt{U_0^2 + 2ghd_1^2},$$

$$U_0 D^2 = U d_1^2 \Leftrightarrow\ U = \frac{U_0 D^2}{d_1^2}\ \Leftrightarrow \mathrm{U}_0 = \frac{d_1^2}{D^2}\sqrt{U_0 + 2gh}\ \Leftrightarrow \frac{\mathrm{U}_0^2 D^4}{d_1^4} =$$
$$U_0^2 + 2gh \Leftrightarrow \frac{\mathrm{U}_0^2\left(D^4 - d_1^4\right)}{d_1^4} = 2gh\ \Leftrightarrow \mathrm{U}_0 = d_1^2 * \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{D^4 - d_1^4}}$$

где D – диаметр выходного отверстия воронки, d_1 – диаметр струи на уровне горлышка. Для того, чтобы вода не проливалась, требуется $d_1 \leq d,$ где d – диаметр горлышка. Таким образом,

$$U_0 \leq \frac{\sqrt{2gh}d^2}{\sqrt{D^4 - d^4}},$$

а время, требуемое для прохождения через воронку объёма V:

$$T = \frac{V}{U_0 \pi D^2/4} \geq \frac{4V\sqrt{D^4 - d^4}}{\pi D^2 d^2\sqrt{2gh}} = 8{,}22\ c$$

MATS Olympiad 2021. Senior league. Problem 3.

В лаборатории проводят эксперименты, связанные с испарением. Сначала достаточно большую каплю жидкости положили на пластину и заметили, что ее форма все время была полусферической, а радиус изменялся со временем по закону $r(t)=R/(1+Dt)$, где R – начальный радиус капли, D – заданная постоянная. В следующем эксперименте на пластину помещают начальную каплю, к которой через равные промежутки времени T добавляют маленькие капельки объемом V, при этом жидкость мгновенно собирается в одну каплю полусферической формы.

a. Пусть объем начальной капли таков, что зависимость радиуса капли от времени – периодическая функция. Определите максимальный и минимальный объем капли в этом случае. Приведите значения для $V=1$ мм^3, $D=1$ с$^{-1}$, $T=1$ с.
b. Пусть при тех же значениях V, D, T начальный объем жидкости равен 8 мм^3. Определите объём жидкости сразу после добавления 4-й капельки.
c. Докажите, что при любом начальном объеме жидкости с течением времени зависимость радиуса от времени будет приближаться к периодической, рассмотренной в пункте a.

Следует считать, что испарение всегда происходит так же, как и в первом эксперименте. Объем полусферы радиуса R вычисляется по формуле $2pR^3/3$.

Решение

a. При периодическом режиме изменения объема капли объем жидкости, испарившийся за время между добавлениями, равен добавляемому объему. Обозначим R_0– начальный радиус, тогда:

$2pR_0^3/3 - 2pR_0^3/(3(1+DT)^3)=V$,

То есть

$$R_0 = \left\{\frac{3V}{2\pi}\left[\frac{(1+DT)^3}{(1+DT)^3-1}\right]\right\}^{1/3}$$

Максимальный объем совпадает с начальным, он наблюдается сразу после добавления очередной капли, он соответствует найденному радиусу:

$$V_+ = V\frac{(1+DT)^3}{(1+DT)^3-1} = \frac{8}{7}\text{мм}^3 = 1.143\text{мм}^3$$

Минимальный объем меньше на V и равен

$$V_- = V\frac{1}{(1+DT)^3-1} = \frac{1}{7}\text{мм}^3 = 0.143\text{мм}^3$$

b. Значения объёма капли V_n в моменты nT (сразу после добавления капельки с номером n) образуют последовательность, которая задаётся линейным рекуррентным соотношением первого порядка:

$$V_{n+1} = \frac{1}{(1+DT)^3}V_n + V$$

Требуемое значение можно найти непосредственным вычислением или выписав общую формулу для n-го члена:

$$V_n = Cq^n + \frac{V}{1-q}, \qquad q = \frac{1}{(1+DT)^3}, \qquad |q| < 1, \qquad \text{C} = V_0 - \frac{V}{1-q}$$

Для заданных значений q=1/8, C=48/7 мм^3,

$$V_4 = \frac{6}{8^3\cdot 7} + \frac{8}{7} = \frac{4102}{3584} = 1.144\text{мм}^3$$

c. Заметим, что количество жидкости v, испарившейся за время T монотонно зависит от начального радиуса:

$$v = \frac{2\pi R^3}{3}\frac{(1+DT)^3-1}{(1+DT)^3}$$

Если v<V, то после добавления очередной капли объем жидкости станет больше, чем был в начале предыдущего цикла и за следующий промежуток времени T испарившийся объем будет больше, чем за предыдущий.

Если v>V, то ситуация обратная – за цикл объем уменьшится и в следующий промежуток времени T испарившийся объем будет меньше, чем в предыдущий.

Значения объема капли V_n в моменты nT (сразу после добавления капельки с номером n) образуют последовательность, которая задается линейным рекуррентным соотношением первого порядка:

$$V_{n+1} = \frac{1}{(1+DT)^3}V_n + V$$

Общая формула n-го члена этой последовательности

$$V_n = Cq^n + \frac{V}{1-q}, \qquad q = \frac{1}{(1+DT)^3}, \qquad |q| < 1, \qquad \text{C} = V_0 - \frac{V}{1-q}$$

где V_0 – начальный объем. При увеличении n первое слагаемое стремится к нулю, а V_n к $V/(1-q)=V_+$, то есть устанавливается периодический режим.