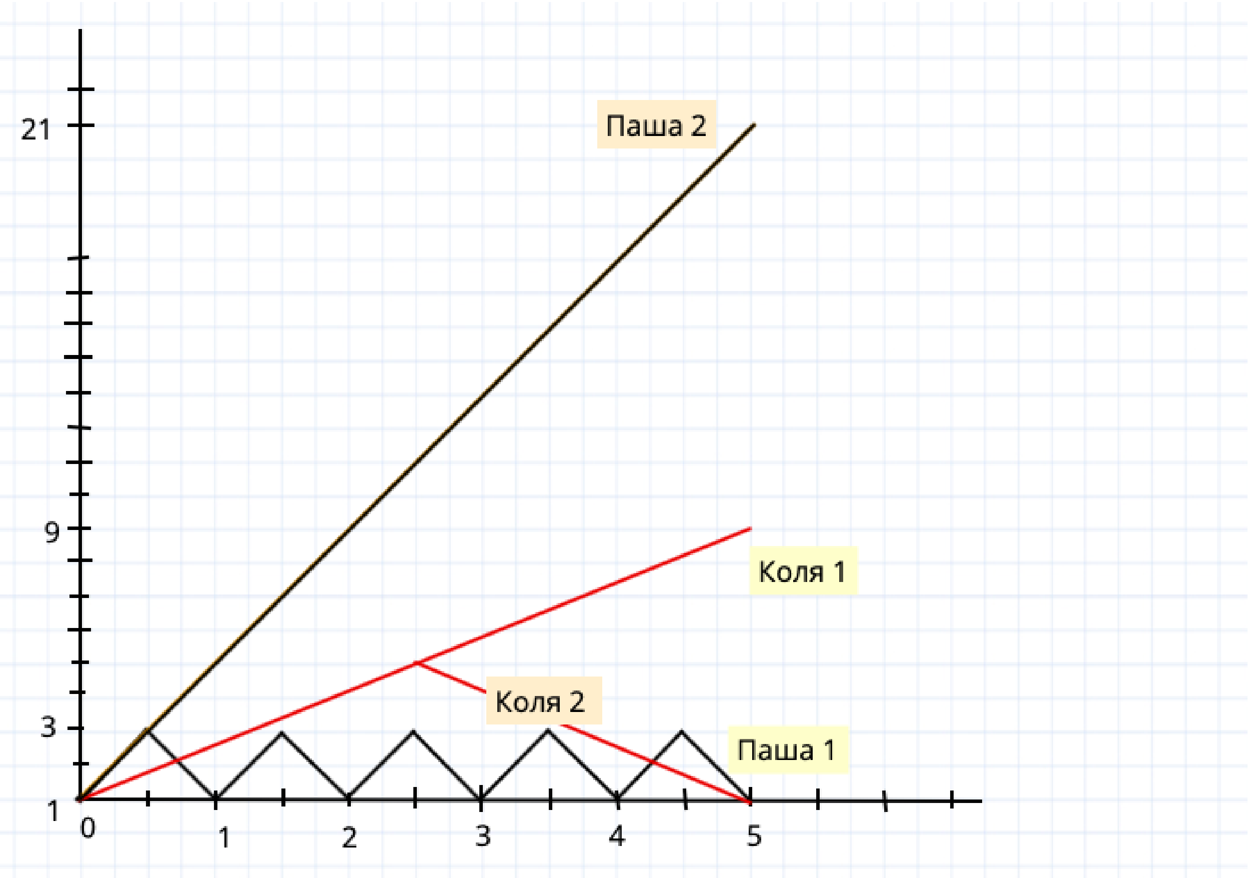
MATS Olympiad 2021. Junior league. Problem 1.

Паша и Коля живут в одном двадцатипятиэтажном доме. В их подъезде установлены два лифта: пассажирский и грузовой, у каждого лифта подъем и спуск происходят с постоянной скоростью, скорости подъема и спуска равны. Однажды мальчики решили устроить гонки на этих лифтах. Выяснилось, что Паша успевает пять раз подняться на третий этаж и спуститься на первый за то время, пока Коля поднимается на девятый этаж с первого. До какого этажа успеет доехать Паша, пока Коля один раз проедет с первого этажа на пятый и обратно? Лифты останавливаются и меняют направление движения мгновенно.

Решение

Построим график зависимости проезда этажей Пашей и Колей от времени, единица времени – подъем Паши с первого этажа на третий и обратно.

Искомый этаж - 21



По условию, за то время, пока Коля проехал 8 этажей, Паша проехал 20 (5 раз 2 этажа вверх и 2 этажа вниз). Длина поездки с первого на пятый этаж и обратно также 8 этажей, значит Паша не разворачиваясь проедет 20 этажей и окажется на 21-м.

MATS Olympiad 2021. Junior league. Problem 2.

Школьник Василий нашел воронку, диаметр выходного отверстия которой 2 см. Ему понадобилось с помощью этой воронки налить воду в двухлитровую бутылку, горлышко которой имеет диаметр 1 см. Василий сумел закрепить воронку в вертикальном положении так, что нижний край выходного отверстия находится на высоте 45 см над горлышком бутылки, и заметил, что если все делать аккуратно, вода не проливается мимо. Определите, за какое наименьшее время Василий сможет наполнить двухлитровую бутылку с помощью такой установки, не проливая воду мимо цели.

Решение

Обозначим через U_0 скорость воды на выходе из воронки. В промежутке между воронкой и бутылкой вода свободно падает, так что по закону сохранения энергии скорость на входе в бутылку $U = \sqrt{U_0^2 + 2gh}$. Так как объем воды, прошедший за единицу времени через воронку и через горлышко одинаков, имеет место равенство:

$$U_0 \frac{\pi D^2}{4} = U \frac{\pi d_1^2}{4} \Leftrightarrow U_0 D^2 = \sqrt{U_0^2 + 2ghd_1^2},$$

$$U_0 D^2 = U d_1^2 \Leftrightarrow U = \frac{U_0 D^2}{d_1^2} \Leftrightarrow \mathrm{U}_0 = \frac{d_1^2}{D^2}\sqrt{U_0 + 2gh} \Leftrightarrow \frac{\mathrm{U}_0^2 D^4}{d_1^4} = U_0^2 + 2gh \Leftrightarrow \frac{\mathrm{U}_0^2(D^4 - d_1^4)}{d_1^4} = 2gh \Leftrightarrow \mathrm{U}_0 = d_1^2 * \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{D^4 - d_1^4}}$$

где D – диаметр выходного отверстия воронки, d_1 – диаметр струи на уровне горлышка. Для того, чтобы вода не проливалась, требуется $d_1 \leq d,$ где d – диаметр горлышка. Таким образом,

$$U_0 \leq \frac{\sqrt{2gh}d^2}{\sqrt{D^4 - d^4}},$$

а время, требуемое для прохождения через воронку объема V:

$$T = \frac{V}{U_0 \pi D^2/4} \geq \frac{4V\sqrt{D^4 - d^4}}{\pi D^2 d^2 \sqrt{2gh}} = 8{,}2\ c$$

MATS Olympiad 2021. Junior league. Problem 3.

В лаборатории проводят эксперименты, связанные с испарением. Сначала достаточно большую каплю жидкости положили на пластину и заметили, что ее форма все время была полусферической, а радиус изменялся со временем по закону r(t)=R/(1+Dt), где R – начальный радиус капли, D – заданная постоянная. В следующем эксперименте на пластину помещают начальную каплю, к которой через равные промежутки времени T добавляют маленькие капельки объемом V, при этом жидкость мгновенно собирается в одну каплю полусферической формы.

a. Пусть объем начальной капли таков, что зависимость радиуса капли от времени – периодическая функция. Определите максимальный и минимальный объем капли в этом случае. Приведите значения для V=1 мм^3, D=1 с$^{-1}$, T=1 с.
b. Пусть при тех же значениях V, D, T начальный объем жидкости равен 8 мм^3. Определите объём жидкости сразу после добавления 4-й капельки.

Следует считать, что испарение всегда происходит так же, как и в первом эксперименте. Объем полусферы радиуса R вычисляется по формуле 2pR^3/3.

Решение

a. При периодическом режиме изменения объема капли объем жидкости, испарившийся за время между добавлениями, равен добавляемому объему. Обозначим R_0– начальный радиус, тогда:

2pR$_0^3$/3 - 2pR$_0^3$/(3(1+DT)^3)=V,

То есть

$$R_0 = \left\{\frac{3V}{2\pi}\left[\frac{(1+DT)^3}{(1+DT)^3-1}\right]\right\}^{1/3}$$

Максимальный объем совпадает с начальным, он наблюдается сразу после добавления очередной капли, он соответствует найденному радиусу:

$$V_+ = V\frac{(1+DT)^3}{(1+DT)^3-1} = \frac{8}{7}\text{мм}^3 = 1.143\text{мм}^3$$

Минимальный объем меньше на V и равен

$$V_- = V\frac{1}{(1+DT)^3-1} = \frac{1}{7}\text{мм}^3 = 0.143\text{мм}^3$$

b. Значения объема капли V_n в моменты nT (сразу после добавления капельки с номером n) образуют последовательность, которая задается линейным рекуррентным соотношением первого порядка:

$$V_{n+1} = \frac{1}{(1+DT)^3} V_n + V$$

Требуемое значение можно найти непосредственным вычислением или выписав общую формулу для n-го члена:

$$V_n = Cq^n + \frac{V}{1-q}, \qquad q = \frac{1}{(1+DT)^3}, \qquad |q| < 1, \qquad \mathrm{C} = V_0 - \frac{V}{1-q}$$

Для заданных значений q=1/8, C=48/7 мм^3,

$$V_4 = \frac{6}{8^3 \cdot 7} + \frac{8}{7} = \frac{4102}{3584} = \frac{293}{256} = 1.145\text{мм}^3$$