1 тур интернет-олимпиады СУНЦ МГУ. 9 класс

1. На сторонах AC и BC равнобедренного ($AC = BC$) треугольника ABC лежат точки N и M так, что $\angle ABN = \angle CNM$, а $NM = MC$. Найдите отношение угла CAB к углу ACB, если $\angle NBC = 60$.
2. Дан многочлен $f(x) = x + 2x^2 + 3x^3 + ... + 2019x^{2019} + 2020x^{2020}$. Сколько у него общих корней с многочленом $g(x) = (x+1) + 3x^2(x+1) + 5x^4(x+1) + ... + 2019x^{2018}(x+1)$?
3. На окружности против часовой стрелки отмечены 7 точек: A, B, C, D, E, F, G. Угол FAC в 2 раза меньше угла ACE, в 3 раза меньше угла CEG, в 4 раза меньше угла EGB, в 5 раз меньше угла GBD, в 6 раз меньше угла BDF и в 7 раз меньше угла DFA. Найдите величину угла EBD в градусах. Численный ответ при необходимости округлите до десятых долей после запятой включительно.
4. Найдите наименьшее число, которое имеет ровно 11 различных делителей (включая 1 и само это число).
5. Функция f определена на всей вещественной прямой и такова, что
   $$\begin{cases} f^2(\frac{7+4x}{3}) + f(x-12) = x^5 - 4x^2, \\ 2f(-8x+22) - f^2(x^2-5x+9) = \sqrt{x}. \end{cases}$$
   Найдите $f(-10)$.
6. В стране N 10 городов, но нет дорог. Министр транспорта решил исправить эту ситуацию: он случайным образом выбирает два города, между которыми нет дороги, и указывает построить дорогу между ними. Какое наименьшее число указов он должен дать, чтобы из любого города можно было гарантированно попасть в любой другой?