1 тур интернет-олимпиады СУНЦ МГУ

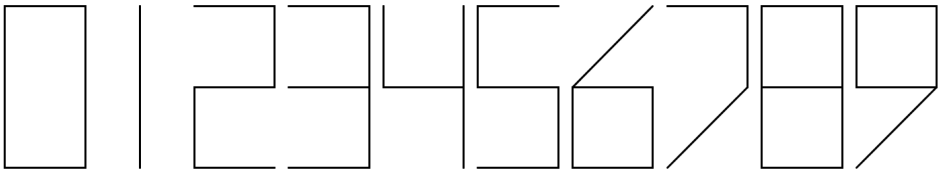
Математика

7 класс

1. В летнем лагере собрались незнакомые ребята. В конце смены оказалось, что каждый мальчик познакомился с пятью девочками, а каждая девочка познакомилась с четверыми мальчиками. Сколько ребят могло быть в лагере, если известно, что их было больше сорока, но меньше пятидесяти?

2. Назовем непустое множество натуральных чисел *четным,* если сумма сисел в нем четна. Например, множества $\{1, 2, 3\}$ и $\{5, 11\}$ четные, а множества $\{7\}$ и $\{7, 10\}$ — нет. Трудолюбивая Настя выписала в тетрадку все четные подмножества множества $\{1, 2, 3, \ldots, 13\}$. Сколько подмножеств у нее получилось?

3. В магазине числа на ценниках записаны цифрами следующего вида:



Хулиган Вася перевернул один из ценников. В результате цена уменьшилось на 1626 рублей. Найдите изначальную цену, если известно, что это целое четырехзначное число рублей.

4. Внимательный Толик написал в тетрадке наибольшее 705-значное число, у которого сумма всех цифр равна произведению всех его цифр. Найдите эту сумму цифр.

5. В прямоугольном треугольнике ABC высота CH в четыре раза меньше гипотенузы AB. Найдите величину наименьшего угла треугольника.

6. Любознательный Аркаша нашел все такие пары натуральных чисел (m, n), что $m^3n - 1$ делится на $m + 1$ и $n^3m + 1$ делится на $n - 1$. Сколько пар нашел Аркаша?

1 тур интернет-олимпиады СУНЦ МГУ

Математика

8 класс

1. В летнем лагере собрались незнакомые ребята. В конце смены оказалось, что каждый мальчик познакомился с десятью девочками, а каждая девочка познакомилась с девятью мальчиками. Сколько ребят могло быть в лагере, если известно, что их было меньше ста?

2. В зоопарке открылся новый павильон, в котором в ряд расположены 6 клеток. Директор зоопарка хочет поселить в них зайца, кролика, волка, лису, бегемота и носорога (по одному в клетку). Сколькими способами он может это сделать, если ни волка, ни лису нельзя селить рядом ни с зайцем, ни с кроликом?

3. На плоскости отмечены 2021 точек (никакие три не лежат на одной прямой) и k отрезков, соединяющих некоторые из них. Оля и Коля играют в следующую игру. Ходы делаются по очереди. Сначала Оля выбирает две точки, называет одну из них A, другую B и кладет фишку в A. После этого каждым своим ходом Коля передвигает фишку из одной отмеченной точки в другую вдоль отрезка (если это возможно), а Оля каждым своим ходом удаляет один отрезок (кроме отмеченных точек). Коля победит, если сможет переместить фишку в B, если не сможет — то победит Оля.

При каком наибольшем k Оля может гарантировать себе победу независимо от того, какие отрезки проведены изначально?

4. Валентин нарисовал на плоскости 2021 луч. На какое наибольшее число областей эти лучи могли разбить плоскость?

5. Дан треугольник ABC. Точка X делит сторону AB пополам. Точка Y на стороне AC такова, что $3CY = AC$. Известно, что $XY \perp AB$. Найдите CX, если $BC = 15$.

6. Любознательный Аркаша нашел все такие тройки целых чисел (a, b, c), что $4^a + 3^b = c^2$. Сколько пар нашел Аркаша?