

1 ТУР ИНТЕРНЕТ-ОЛИМПИАДЫ СУНЦ МГУ. 10 КЛАСС

1. В колоде у фокусника 36 карт. Он перемешивает колоду следующим образом: делит её на две части, в каждой не менее 5 карт, и меняет их местами; затем он показывает верхнюю карту, кладет её внизу колоды и перемешивает ещё раз, и так далее. Оказалось, что каждый раз фокусник умудряется показать пиковую даму. Какое наименьшее количество дам может быть у него в колоде?
2. Найдите наименьший корень уравнения

$$\sqrt{15}\sin x + \sqrt{5}\cos x - \sqrt{10}\cos\left(2x + \frac{\pi}{12}\right) + \sqrt{10}\sin\left(2x + \frac{\pi}{12}\right) = 4\sqrt{5},$$

лежащий правее числа 7π . Численный ответ при необходимости округлите до десятых долей после запятой включительно.

3. На окружности против часовой стрелки отмечены 7 точек: A, B, C, D, E, F, G . Угол FAC в 2 раза меньше угла ACE , в 3 раза меньше угла CEG , в 4 раза меньше угла EGB , в 5 раз меньше угла GBD , в 6 раз меньше угла BDF и в 7 раз меньше угла DFA . Найдите величину угла EBD в градусах. Численный ответ при необходимости округлите до десятых долей после запятой включительно.
4. Функция f определена на всей вещественной прямой и такова, что
$$\begin{cases} 5f(2\sin t) - 3f\left(4 - 3\cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right)\right) = 28t^2, \\ 6f\left(-7\sin\left(t - \frac{2\pi}{3}\right)\right) - 7f\left(2\cos^2 t + \frac{1}{2}\right) = 72t^2 - \pi^2. \end{cases}$$
 Найдите $f(2)$. Численный ответ при необходимости округлите до десятых долей после запятой включительно.
5. Палиндромом называется число, которое читается одинаково и слева направо, и справа налево. Например, сумма всех делителей (включая единицу и само число) числа 2021 — число 2112 — является палиндромом. Найдите такое двузначное число, что сумма всех его делителей — двузначный палиндром.
6. Вершины P и Q квадрата $PQRS$ лежат на стороне AB треугольника ABC , вершина R лежит на стороне BC , вершина S лежит на стороне AC . Описанная вокруг квадрата $PQRS$ окружность касается прямой CB и пересекает отрезок AS в точке T . Площадь треугольника BRQ равна 8, отрезок AT равен $\frac{21}{5}$. Найдите длину отрезка AP .