

Что такое математическое моделирование

Константин Авилов

научный сотрудник ИВМ РАН

член Expert Panel IMMS

сотрудник СУНЦ МГУ

Математическое моделирование и школа

- В российской школе, как считается, не изучают математическое моделирование. Но изучают математику, физику, химию, программирование и т.д.
- На самом деле все естественные науки едины, а математика и информатика – это инструменты, созданные по запросам физики и других «практических» наук.
- Математическое моделирование – это, по сути, метод всех количественных исследований в любых науках.
Любое исследование, ищущее связь между измеримыми (количественными) параметрами чего-либо, порождает математическую модель.
- С точки зрения школы, математическое моделирование – это обратное соединение всех естественных наук в единую «science».

Что такое математическая модель

- Математическая модель – это некоторый математический «конструкт», описывающий какие-то реальные процессы
- Математическая модель – это всегда некоторое упрощение, некоторая концептуализация, отсекающая какие-то свойства реальности
- Если модель *адекватна*, то её изучение позволяет узнать/предсказать некоторые свойства объекта моделирования
- Умение строить адекватные мат.модели – это наполовину наука (не тождественная математике!), а наполовину – искусство
- Мат.моделирование – это не математика, не информатика, не наука о предметной области; это всё вместе!

Мат.моделирование в жизни

- В реальной жизни мат.моделирование встречается намного чаще, чем кажется на первый взгляд:
 - Научно-исследовательские задачи
 - Инженерные расчёты (особенно сложных систем)
 - Бизнес-планирование и бизнес-аналитика
 - Анализ рынков, банковское планирование
 - Прогнозирование сложных био-медицинских и экологических систем
 - Построение «миров» сложных компьютерных игр
 - Некоторые варианты искусственного интеллекта

Что должен уметь «мат.модельер»

- Поскольку мат.моделирование – это «сразу всё» в науке, то и хороший «мат.модельер» должен уметь многое, а то и всё:
 - Общая математика («кирпичи», из которых строятся мат.модели)
 - Вычислительная математика и научное программирование
 - Прикладное (интерфейсное) программирование
 - Умение быстро разбираться в новых предметных областях (физика, химия, биология, медицина, банковское дело, и т.д.) и, глядя на них «со стороны», наводить в них логический порядок
 - Умение разговаривать со специалистами в предметных областях так, чтобы, не давая математическим мировоззрением, «вынуть» из них их субъективное понимание предметной области

Мат.моделирование в СУНЦ МГУ

- **Спец.курс «Мат.моделирование»** - в основном для учеников инженерного направления, но при желании на него могут ходить и другие. (+ связь с курсом информатики)
Основные преподаватели: Авилов К.К., Усатюк В.В., Дубровский В.Н.
- **Турнир по математическому моделированию** – ежегодное российско-международное мероприятие (осень), на котором основной компонент – командная работа над «мат.модельерской» задачей (≈ 2 дня), а также есть несколько более «олимпиадные» компоненты
- **IMMC (International Mathematical Modeling Challenge)** – ежегодное международное соревнование (весна), командная работа (5 суток) над сложной «мат.модельерской» задачей.
Российский этап IMMC называется ВКММ.

Примеры задач

- **IMMC (International Mathematical Modeling Challenge):**
 - Jet Lag (2017)
 - G.O.A.T. (2021)
 - Carrying capacity of the Earth (2019)
- **Турнир по математическому моделированию (конкурс Мамонт):**
 - Классификация ящериц (2020)
 - Трёхосный акселерометр (2018)

Полные версии всех задач доступны на сайтах IMMC и TMM:

<http://www.immchallenge.org/>

<https://internat.msu.ru/turnir-mm/>

Чему учим в СУНЦ МГУ

- Очевидно, что за 1-3 года старшей школы невозможно полностью подготовить «мат.модельера»
- Обучение мат.моделированию в ВУЗах тоже, как правило, фрагментировано по разным наукам – и это сильно затрудняет понимание всего этого как единого механизма
- В СУНЦ МГУ мы пытаемся прежде всего дать **базовый «мат.модельерский» кругозор**, т.е. некоторое упрощённое видение «общей картины» и взаимосвязей между различными узкими областями знаний, что позволит при дальнейшем обучении куда легче объединять всё в своей голове
- Вместе с тем в СУНЦ МГУ мы учим и необходимому (но находящемуся за пределами стандартной школьной программы) инструментарию: основы анализа данных/статистики, основы научного программирования, основы вычислительной математики, scientific writing.

Спасибо за внимание!

Построение математических моделей

Стратегии построения математических моделей:

- **«От теории»:** в областях, где уже почти всё известно и имеются хорошо подтвержденные теории, мат.модели строятся как частный случай теории. Обычно есть «конструктор» из примитивов, позволяющий «собирать» мат.модель.

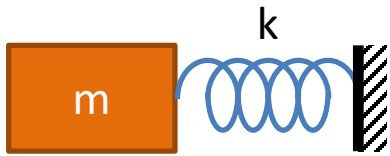
Примеры: классическая механика и пр. классическая физика

- **«От данных»:** в областях, где общих теорий нет, или непонятно, что происходит в эксперименте, мат.модели строятся как инструмент поиска зависимостей в данных.

Примеры: биология/медицина, «передний край» любых естественных наук

Типы «простых» математических моделей

1) Алгебраические модели:



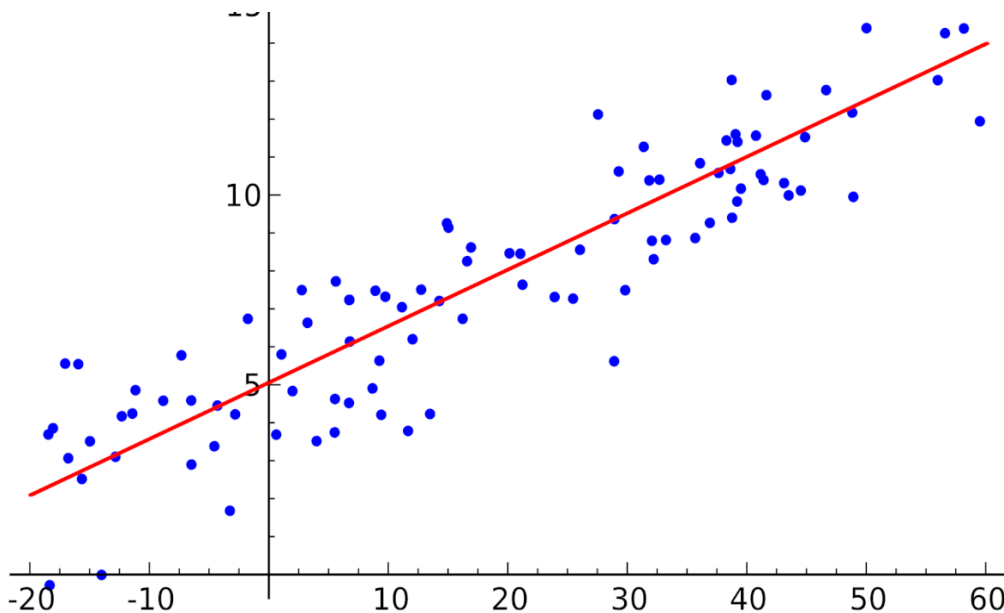
$$ma = F = kx$$



$$PV = \nu RT$$

Типы «простых» математических моделей

2) Регрессии



Данные: $(x_i, y_i), i=1...N$

Регрессия:

$$y=f(x,\theta)+\varepsilon$$

θ - параметры, ε - ошибка

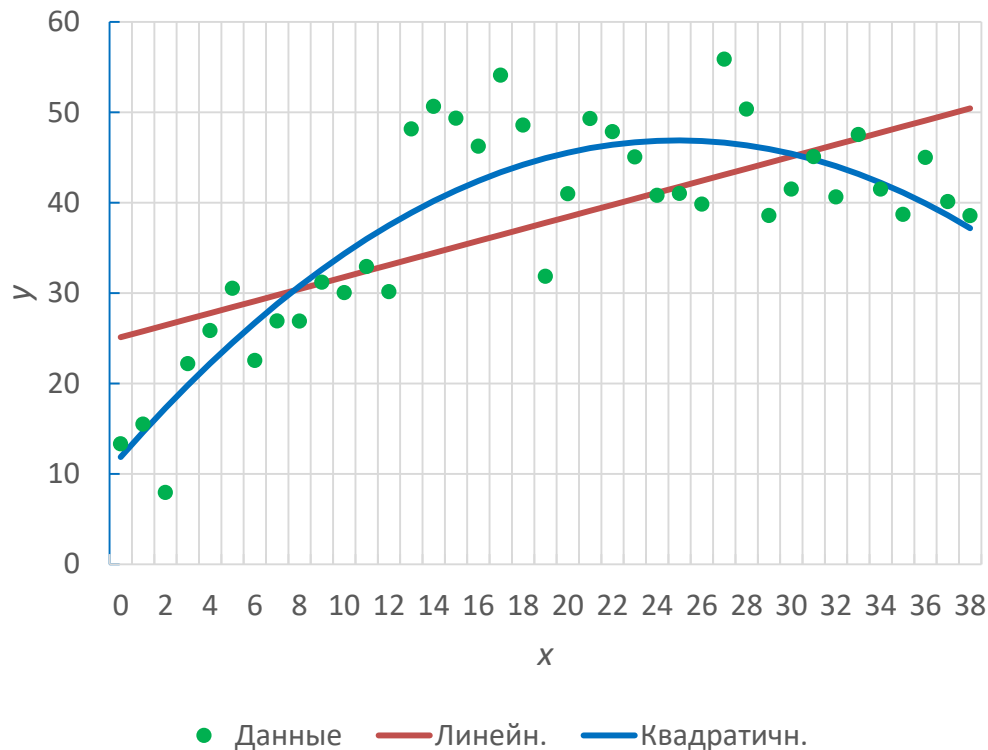
Линейная рег.: $f=a+bx$,
 a и b – параметры (θ)

Квадратичная рег.: $f=a+bx+cx^2$,
 a, b и c – параметры (θ)

Существуют стандартные методы вычисления наилучших параметров θ по данным (x_i, y_i) («методы подгонки регрессии», «метод наименьших квадратов», и т.п.)

Типы «простых» математических моделей

2) Регрессии



Данные: $(x_i, y_i), i=1...N$

Регрессия:

$$y=f(x,\theta)+\varepsilon$$

θ - параметры, ε - ошибка

Линейная рег.: $f=a+bx$,
 a и b – параметры (θ)

Квадратичная рег.: $f=a+bx+cx^2$,
 a, b и c – параметры (θ)

Существуют стандартные методы вычисления наилучших параметров θ по данным (x_i, y_i) («методы подгонки регрессии», «метод наименьших квадратов», и т.п.)

Типы «простых» математических моделей

3) Эволюционные модели: когда что-то изменяется во времени

- Часто такие модели описываются дифференциальными уравнениями
- Дискретно-алгебраический вариант

$$X(t+1)=f(X(t), \Theta, \dots), \quad t - \text{ время}$$

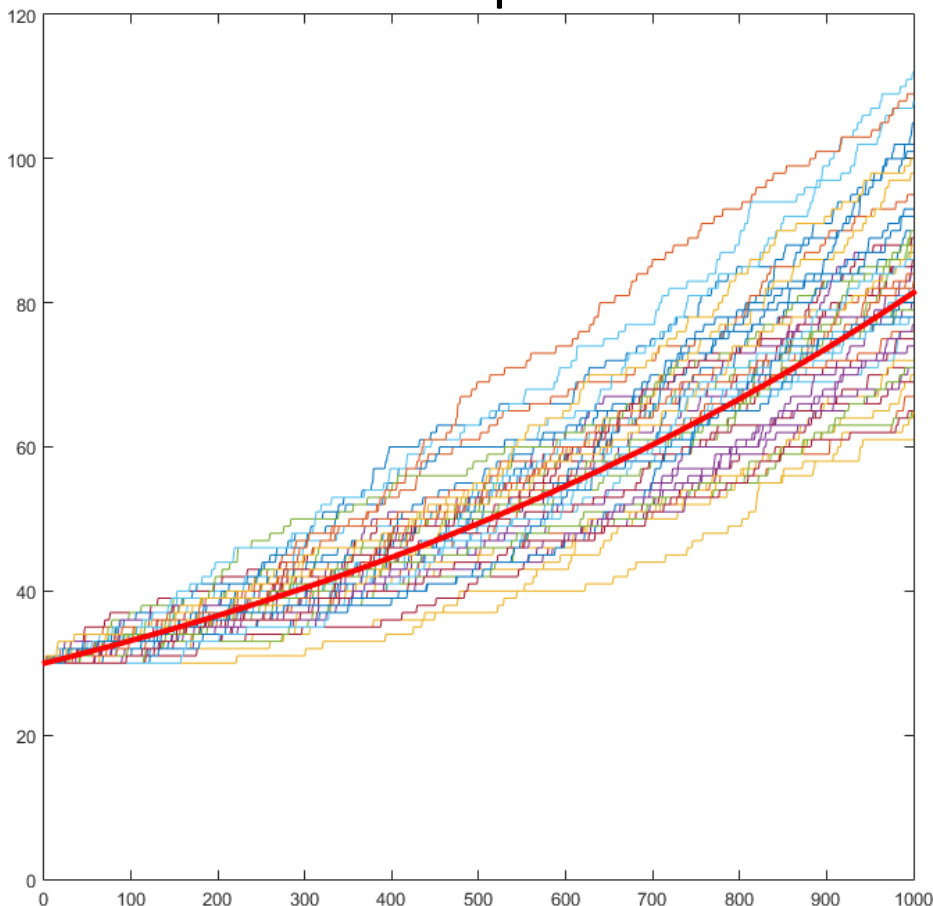
Например (модель Мальтуса – рост или вымирание популяции с удельной скоростью a):

$$X(t+1)=(1+a)X(t)$$

Типы «простых» математических моделей

4) Стохастические модели (модели с элементом случайности)

- Чисто вероятностные модели (на основе теории вероятностей) – вычисление вероятностей событий на основе распределений



- Стохастический вариант эволюционных моделей: вместо скоростей процессов задаются их вероятности на каждом шаге

На графике: жирная линия – детерминированный «Мальтус», остальные линии – «стох.Мальтус» с той же скоростью роста a .

Типы «простых» математических моделей

5) Агентные (симуляционные) модели

- Создается «компьютерная игра», в которой некоторые сущности (агенты) взаимодействуют и создают какое-то сложное общее поведение.
- Агентные модели позволяют отобразить сложные схемы взаимодействия между агентами.
- Примеры (NetLogo):
 - формирование стай птиц на основе простых правил полёта каждой птицы
 - распространение инфекций в структурированных популяциях

Как создавать мат.модель

Создание мат.модели похоже на решение задачи по физике:

1. Надо понять, «что вообще происходит», какими «переменными» описывается ситуация/объект (т.е. создать «концептуальную модель»).
2. Определить законы/правила взаимосвязи между «переменными». Это могут быть и ранее известные законы, и какие-то приблизительные правила с неизвестными параметрами.
3. Если есть неизвестные параметры, оценить их из имеющихся данных («настройка модели на данные»).
4. Изучить свойства полученной математической модели (описания связей между «переменными»), получить полезные выводы о свойствах объекта изучения.