На олимпиадах различного уровня очень часто можно встретить задачи про цифры в записи числа. В младших классах – это ребусы. То есть арифметические примеры, где цифры зашифрованы буквами так, что разным буквам соответствуют разным цифрам, а одинаковым буквам – одинаковые цифры. В более старших классах появляются задачи, в которых переставляют или зачеркивают цифры в числе. Для решения таких задач удобно представлять числа в десятичной записи, то есть, разбивать по разрядам.

***Определение.*** Десятичной записью натурального числа называется его представление в виде $a_k 10^k + a_{k-1}10^{k-1} + \cdots + a_1 \cdot 10 + a_0$, где $a_k \neq 0$ и все $a_0, a_1, \cdots, a_k$— целые, неотрицательные и не превосходящие 9.Таким образом, числа 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 играют особую роль. Обычно используют запись $\overline{a_k a_{k-1} \ldots a_1 a_0}$ (верхнюю черту ставят, чтобы не путать с умножением).

Они служат для десятичной записи других чисел, поэтому называются десятичными цифрами.

При записи числа пропускают степени числа 10 и просто выписывают его цифры подряд.

Например, $2019 = 2 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 + 9 \cdot 10^0$.

А произвольное четырехзначное число $\overline{abcd} = a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + c \cdot 10 + d$.

Десятичная запись натурального числа n содержит ровно k цифр, если и только если выполнено неравенство $10^{k-1} \leq n < 10^k$.

Начнем разбирать типовые задачи. В некоторых задачах мы приведем несколько способов решения: используя навыки выполнения арифметических действий и через десятичную запись. При решении задач от вас требуется только одно верное решение. За два способа дополнительных баллов не будет.

Отметим, что многие задачи этого модуля были предложены на олимпиадах «Ломоносов», «Покори Воробьевы горы» и окружном этапе Всероссийской олимпиады школьников по математике.

И напомним, что решить задачу – это найти все решения и доказать, что других решений нет. Поэтому если вы подобрали один вариант, то вы еще можете быть очень далеки от полного решения задачи. Ведь решить задачу – это значит найти все возможные варианты ответа и доказать, что других вариантов нет.

**Задача 1**. *Найдите все решения ребуса 2014+ГОД=СОЧИ.*

Решение. Самое большое трехзначное число – это 999. Самое маленькое – это 100. Так как 2014+999=3013 и 2014+100=2114, то 2114≤СОЧИ≤3013. Поэтому С=3 или С=2.

Случай 1. Если С=3, то Г=9. В противном случае Г≤8, тогда максимальное трехзначное число – это 897. Но тогда СОЧИ≤2014+897=2911.

Тогда О=8. В противном случае О≤ 7, тогда максимальное трехзначное число – это 978. Но тогда СОЧИ≤2014+978=2992.

Тогда Д=7 или Д=6. В противном случае Д≤ 5, тогда максимальное трехзначное число – это 985. Но тогда СОЧИ≤2014+985=2999.

Осталось сделать проверку: 2014+987=3001 и 2014+986=3000. Оба варианта не подходят.

Случай 2. Пусть С=2. Заметим, что из сложения в разряде сотен следует, что при сложении десятков должен был произойти переход через разряд. При сложении с нулем число не меняется, а в примере 0+Г=О. Максимальный переход через десяток, который мог возникнуть при сложении двузначных чисел – это 1 (максимальная сумма цифр 9+9=18, еще могла возникнуть 1 как переход через десяток, поэтому максимально при сложении в разряде могло получиться 19). Таким образом, 1+О+1≥10 (вторая единица появилась из-за возможности перехода через десяток, возникшего в разряде единиц). Поэтому О=8 или О=9.

Если О=9, то 2014+Г9Д=29ЧИ. Тогда Г=8. Дальше быстрее всего подставить все варианты для Д (цифры 2, 8, 9 уже использованы): 2014+890=2904 (не подходит), 2014+891=2905 (подходит), 2014+893=2907 (подходит), 2014+894=2908 (не подходит), 2014+895=2909 (не подходит), 2014+896=2910 (подходит), 2014+897=2911 (не подходит).

Если О=8, то Г=7, Ч=0 и сумма в разряде единиц не меньше 10. 2014+Г8Д=280И. Из того, что 4+Д≥10 следует, что Д=6, 9. Проверяем: 2014+786=2800 (не подходит), 2014+789=2803 (подходит).

*Ответ:* 2014+789=2803, 2014+891=2905, 2014+893=2907, 2014+896=2910.

**Задача 2.** *Решите ребус ДОН+ОКА+ЛЕНА+ВОЛГА=АНГАРА.*

Решение.

Способ 1. Рассмотрев последние цифры ребуса, мы получаем, что сумма Н+А+А+А оканчивается на А, значит, Н+А+А оканчивается на 0. Сумма чисел ДОН+ОКА+ЛЕНА+ВОЛГА меньше, чем 999+999+9999+99999<1000+1000+10000+100000<120000. Поскольку эта сумма есть АНГАРА, это означает, что А=1 и Н<2. Но, так как Н≠А, получаем Н=0. Но тогда Н+А+А=2 – противоречие.

Способ 2. Аналогично первому способу покажем, что левая часть < 120000. Поэтому А=1. Тогда сумма Н+А+А+А=Н+3 оканчивается на 1. Следовательно, Н=8. А из той же первой оценки известно, что Н<2. Противоречие.

Ответ. Ребус не имеет решения.

**Задача 3**. *Сумма двух натуральных чисел равна 1498. Если у одного из них зачеркнуть цифру единиц, равную 2, то получится второе число. Найдите все такие пары.*

Решение.

Способ 1. Очевидно, большее число четырехзначное, а меньшее трехзначное Представим эту задачу как задачу на восстановление записи

$$\begin{array}{r} +\begin{array}{r} ***2 \\ *** \end{array} \\ \hline 1498, \end{array}$$

где второе слагаемое совпадает с трехзначным числом, образованным тремя первыми цифрами первого слагаемого. Последовательно получаем:

$$\begin{array}{r} +\begin{array}{r} **62 \\ **6 \\ \hline 1498 \end{array} \to +\begin{array}{r} *362 \\ *36 \\ \hline 1498 \end{array} \to +\begin{array}{r} 1362 \\ 136 \\ \hline 1498. \end{array} \end{array}$$

Мы нашли оба слагаемых – 1362 и 136.

Способ 2. Обозначим меньшее число через $x$. Тогда большее число равно $10x + 2$. Получаем уравнение, которое легко решается: $(10x + 2) + x = 1498$, $11x + 2 = 1498$, *11x=1496, x=136.*

<u>Ответ:</u> 1362 и 136.

**Задача 4.** *Шестизначное число оканчивается цифрой 7. Если эту цифру перенести в начало числа, то оно увеличится в 5 раз. Что это за число?*

<u>Решение.</u> Способ 1. Будем решать эту задачу как восстановление записи.

$$\times\begin{array}{r} *****7 \\ 5 \\ \hline 7*****, \end{array}$$

где пятизначные числа, обозначенные в произведении звездочками в первом множители и в произведении одинаковы.

Последовательно получаем:

$$\times\begin{array}{r} ****57 \\ 5 \\ \hline 7****5 \end{array} \to \times\begin{array}{r} ***857 \\ 5 \\ \hline 7***85 \end{array} \to \times\begin{array}{r} **2857 \\ 5 \\ \hline 7**285 \end{array} \to \times\begin{array}{r} *42857 \\ 5 \\ \hline 7*4285 \end{array} \to \times\begin{array}{r} 142857 \\ 5 \\ \hline 714285. \end{array}$$

Исходное число оказалось равным 142857.

Способ 2. Обозначим искомое число через 10x+7, где x – количество десятков в числе. Получаем уравнение

$$(10x + 7) \cdot 5 = 7 \cdot 10^5 + x.$$

Из него находим $x$, а затем вычисляем $10x + 7$:

$$50x + 35 = 700000 + x, \qquad 49x = 699965, \qquad x = 14285, \qquad 10x + 7 = 142857.$$

<u>Ответ:</u> 142857.

<u>Замечание</u>. Число 142857, которое получилось в ответе, часто встречается при решении подобных задач. Из него с помощью перестановки последней цифры на первое место последовательно находим пять таких шестизначных чисел: 714285, 571428, 857142, 285714, 428571.

Разложение числа 142857 на простые множители имеет следующий вид: $142857 = 3^3 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37$.

Следовательно, это число делится на 27. Но и все записанные выше шестизначные числа делятся на 27, а некоторые – на 81. Число 142857 делится на 11, 13 м 37. Но и остальные шестизначные числа делятся на 11, 13 и 27. Кроме того, если число 142857 умножать на числа 2, 3, 4, 5 и 6, то получаются соответственно числа 285714, 428571, 571428, 714285, 857142 – те самые пять чисел, только записанные в ином порядке. Наконец, 142857· 7 = 999999.

**Задача 5.** *Некоторое трехзначное число сложили с числом, записываемым теми же цифрами, но в обратном порядке, и получили 1777. Какие числа складывали?*

Решение. Пусть число $\overline{abc} = 100a + 10b + c,$ тогда $\overline{abc} + \overline{cba} = 101a + 20b + 101c = 1777$. Сумма a+c должна оканчиваться на 7, то есть $a + c = 7$ или $a + c = 17$. Первый случай невозможен, поскольку тогда $101a + 20b + 101c = 101 \cdot (a + c) \leq 7 \cdot 101 + 9 \cdot 20 = 707 + 180 < 1777$. Следовательно, $a + c = 17,$ что возможно только если a=8, c=9 или наоборот. Подставляя в равенство, получим $1717 + 20b = 1777,$ откуда $20b = 60,\ \ b = 3$.

Ответ. 839 и 938.

**Задача 6**. *Алла загадала трехзначное число, в котором нет цифры 0 и все цифры различны. Белла записала число, в котором те же цифры идут в обратном порядке. Галя вычла из большего числа меньшее. Какая цифра стоит у полученной разности в разряде десятков?*

Решение. Поскольку мы из большего числа вычитаем меньшее, цифра в разряде сотен у первого числа больше, чем у второго. Тогда в разряде единиц, наоборот, у первого числа числа цифра меньше, чем у второго. Поэтому при вычитании придется занять единицу в разряде десятков. Исходно в разряде десятков стояли одинаковые цифры, но теперь у уменьшаемого цифра получилась на единицу меньше, чем у вычитаемого. Значит, придется занять единицу в разряде сотен. При этом в разряде десятков уменьшаемое оказывается на 9 больше вычитаемого. Значит, в результате получится цифра 9.

Ответ: 9.

**Задача 7.** *А) Маша особенно любит цифры 1, 2, и 3 и хочет составить все возможные трехзначные числа из этих цифр. Сколько чисел у нее получится? Какова сумма всех этих чисел?*

*Б) Каковы будут общие формулы для ответов на пункт А, если цифры 1, 2, 3 заменить на произвольные, но разные $a, b$ и $c$?*

Решение. А) Числа могут состоять из трех одинаковых цифр: 111, 222, 333. Из двух одинаковых и одной другой: 112, 121, 211, 113, 131, 311, 221, 212, 122, 223, 232, 322, 331, 313, 133, 332, 323, 233. Все три цифры разные: 123, 132, 213, 231, 312, 321. Всего чисел 27.

А складывать будем «хитро». Посмотрим на разряд единиц. Цифра 1 там встречается 9 раз. Всего «вклад» в общую сумму $9 \cdot 1$. Перейдем к разряду десятков. Цифра 1 там тоже встречается 9 раз. Всего «вклад» в общую сумму $9 \cdot 10$. С сотнями аналогично – их вклад $9 \cdot 100.$ Итоговый вклад единицы равен $9 + 9 \cdot 10 + 9 \cdot 10^2$. Аналогично с двойкой и тройкой. Их вклады соответственно равны $2 \cdot (9 + 9 \cdot 10 + 9 \cdot 10^2)$ и $3 \cdot (9 + 9 \cdot 10 + 9 \cdot 10^2)$. Поэтому сумма равна $(1 + 2 + 3) \cdot (9 + 9 \cdot 10 + 9 \cdot 10^2) = 6 \cdot 999 = 5994$.

Б) Решается аналогично пункту А. Все те же числа, только вместо 1 надо подставить a, вместо 2 – b, вместо 3 – c. А сумма будет равна $999 \cdot (a + b + c)$.

Ответ. А) 27 и 5994; Б) 27 и $999 \cdot (a + b + c)$.

**Задача 8**. *На доске написаны три цифры. Петя посчитал их произведение, а Вася составил из них трехзначное число. Могло ли у Пети получиться число больше, чем у Васи?*

Решение. Пусть Васино число $\overline{abc}$. Тогда $\overline{abc} \geq \overline{a00} = a \cdot 100 > a \cdot b \cdot c$. Последнее неравенство верно, так как максимальное произведение двух цифр равно $9 \cdot 9 = 81$.

Ответ: нельзя.

Это самое короткое и строгое решение. Попытки рассуждать по-другому, скорее всего, обречены на провал.

Пример неверного рассуждения: «Максимальное произведение равно $9 \cdot 9 \cdot 9 = 729$. Но 999>729, поэтому у Пети не получится.»

Подробно разберем, что, на самом деле, доказано в этом рассуждении.

Любое трехзначное число $100 \leq \overline{abc} \leq 999$, а любое произведение трех цифр $0 \leq a \cdot b \cdot c \leq 729$. Тот факт, что мы установили границ для этих двух значений не позволяет их сравнивать для конкретных трехзначных чисел. Множества значений пересекаются. Такой способ сработал бы, если бы, например, мы знали, что для некоторых чисел $x$ и $y$ верно, что $5 \leq x \leq 26$ и $40 \leq y \leq 58$, то могли бы сделать вывод, что $x < y$.

Говорить, что число «растет быстрее», чем произведение его цифр, - тоже не путь к успеху. Давайте сравним два последовательных числа. Для числа 345 произведение цифр равно $3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$. Следующее число 346, а произведение его цифр $3 \cdot 4 \cdot 6 = 72$. То есть, само число увеличилось на 1, а произведение увеличилось на 12. Произведение в каком-то смысле «выгоднее», чем сложение.

Перебор для этой задачи будет слишком большим.