Чтобы каждый раз не повторяться, договоримся, что все числа, о которых пойдет речь в этой теме, - целые.

Четным числом называется число, которое делится на 2. Таким образом, «общий вид» четного числа $2n$, где n – произвольное целое число.

Речь идет именно о целых, а не только о натуральных (то есть целых положительных) числах. В частности, важно понимать, что 0 – тоже четное число.

Общий вид нечетного числа – это $2n+1$. Действительно, если от нечетного числа отнять 1, то оно станет четным, то есть нечетное число равно сумме четного числа $2n$ и единицы. Часто используется запись нечетного числа и в виде $2n-1$.

Мы говорим, что два числа имеют разную четность, если одно из них четно, а другое нечетно. В противном случае числа имеют одинаковую четность.

Легко доказать следующие свойства четности целых чисел.

Свойство 1. *Сумма четных чисел четна.*

Доказательство: $2m+2n=2(m+n)$.

Свойство 2. *Сумма двух нечетных чисел четна.*

Доказательство: $2m+1+2n+1=2m+2n+2=2(m+n+1)$.

Свойство 3. *Сумма четного и нечетного чисел нечетна.*

Доказательство: $2m+2n+1=2(m+n)+1$.

Свойства 1-3 можно кратко сформулировать так. Сумма двух чисел одной четности четна, а сумма чисел разной четности нечетна.

Свойство 4. *Произведение любого числа на четное – четно.*

Доказательство: $(2m)n=2(mn)$.

Свойство 5. *Если произведение нечетно, то все его сомножители нечетны.*

Следует из свойства 4. Если бы было хотя бы одно четное, то и все произведение было бы четным.

Свойство 6. *Сумма четного количества нечетных чисел четно.*

Доказательство. Раз чисел четное количество, то разобьем их на пары. В каждой паре по свойству 2 сумма будет четной. А по свойству 1 и вся сумма тоже будет четной.

Свойство 7. *Сумма нечетного количества нечетных чисел нечетна.*

Доказательство. Уберем последнее слагаемое. Из свойства 6 следует, что сумма будет четной. Прибавим к четному числу нечетное. Получим нечетное по свойству. 3.

Свойство 8. *Разность и сумма двух данных чисел – числа одной четности.*

Доказательство. Рассмотрим два произвольных числа a и b. Чтобы из их разности $a - b$ получить их сумму $a + b$, надо к разности добавить $2b$. То есть: $a + b = a - b + 2b$. Если $a - b$ четно, то четно и $a + b$ (по свойству 1). Если $a - b$ нечетно, то нечетно и $a + b$ (по свойству 3).

Свойство 9. *Если объекты можно разбить на пары, то их количество четно.*

Задача 1. *Числа m и n целые. Докажите, что число mn(m+n) четно.*

Решение. Если числа m и n одинаковой четности, то четна их сумма $m + n$. Если же они разной четности, то четно их произведение mn. По свойству 4 доказано.

Задача 2. *Сумма трех чисел нечетна. Четным или нечетным может быть их произведение.*

Решение. Если все три числа нечетные, то и сумма нечетная. Если два числа нечетные, а одно четное, то сумма четная. Если одно число нечетное, а два четных, то сумма нечетная. Если все числа четные, то и сумма четная. Произведение трех нечетных чисел нечетно. А произведение двух четных чисел и одного нечетного четно. Поэтому нельзя однозначно говорить о четности произведения.

В задаче 2 уже происходило некоторое чередование четных и нечетных чисел. Заметим, что если к некоторому выражению мы прибавляем четное число, то его четность не меняется (было четным и осталось четным, было нечетным и осталось нечетным). А вот если прибавить нечетное число, то четность поменяется (было нечетное, а стало четное, было четное, а стало нечетное).

Задача 3. *Рассмотрим значения выражений:*

1;

1+2;

1+2+3;

1+2+3+4;

1+2+3+4+5;

1+2+3+4+5+6;

1+2+3+4+5+6+7;

1+2+3+4+5+6+7+8;

1+2+3+4+5+6+7+8+9;

1+2+3+4+5+6+7+8+9+10.

Не вычисляя суммы, надо определить сколько здесь четных.

Решение. Будем смотреть, как изменяется четность при переходе от строки к строке.

1 – нечетное; прибавляем четное; четность сохраняется;

1+2 – нечетное; прибавляем нечетное; четность меняется;

1+2+3 – четное; прибавляем четное; четность сохраняется;

1+2+3+4 – четное; прибавляем нечетное; четность меняется;

1+2+3+4+5 – нечетное; прибавляем четное; четность сохраняется.

Можно продолжать делать дальше, но давайте заметим, что по четности выражение 1 ничем не отличается от выражения 5: само нечетное, а прибавлять будем четное. Четные и нечетные числа, которые мы прибавляем от строки к строке чередуются. Поэтому последовательности по четности зацикливается:

Нечетное, нечетное, четное, четное, нечетное, нечетное, четное, четное…

И быстро получаем ответ, что среди наших 10 выражений четных ровно 4.

Задача 4. *В ряд выписаны числа от 1 до 5. Можно ли расставить между ними знаки «+» и «–» таким образом, чтобы значение полученного выражения было равно нулю?*

Решение. В задачах такого типа важно следующее. Четность выражения не зависит от расстановки знаков. Например, расставим все «+»:

1+2+3+4+5=15.

По свойству 8 можно заменить любую сумму на разность. Например, заменим 3+4 на 3-4. Выражение останется нечетным:

1+2+3-4+5=7.

А 0 – число четное. Поэтому никак не может получиться.

Задача 5. *На чудо-дереве растут 28 апельсинов и 19 бананов. Каждый день садовник снимает с дерева ровно два фрукта. Если снятые фрукты одинаковы, то на дереве появляется новый банан, а если разные, то новый апельсин. В конце концов на дереве оказался один фрукт. Какой именно?*

Решение. Следим за четностью фруктов в каждом действии. Изначально апельсинов четно, а бананов нечетно.

Вариант 1. Снимаем банан и апельсин. Четность бананов изменилась, а апельсинов – нет (сняли апельсин и появился апельсин).

Вариант 2. Снимаем два банана. Четности бананов и апельсинов сохранились. Число бананов уменьшилось на 2 (если из четного вычесть 2, то оно останется четным; аналогично для нечетных).

Вариант 3. Снимаем два апельсина. Четности бананов и апельсинов сохранились.

Таким образом, на каждом шаге количество апельсинов будет четным. В конце остался один фрукт. Этот фрукт по четности не может быть апельсином, значит он банан.

Задача 6. *По кругу написано 7 натуральных чисел. Докажите, что найдутся два соседних числа, сумма которых четна.*

Решение. Метод «от противного». Пусть не найдутся. Тогда у каждой пары соседних чисел сумма нечетная. Сумма двух чисел нечетная, если одно число четное, а другое нет. Возьмем любое число, пусть оно нечетное, пойдем по часовой стрелке. Следующее – четное, потом – нечетное и так далее. То есть четности чисел должны чередоваться. Но чисел нечетное количество. Поэтому, когда пройдем полный круг, то получим противоречие.

Задача 7. *Кузнечик прыгает по прямой – каждый раз на 1 метр влево или вправо. Через некоторое время он оказался в исходной точке. Докажите, что он сделал чётное число прыжков.*

Решение. Посадим кузнечика на числовую прямую. Пусть изначально он находится в точке с координатой 0. Тогда в следующий момент он будет находится в точке с координатой 1 или -1. Прибавив или отняв 1, он поменял четность координаты. Каждый прыжок четность будет меняться. Чтобы попасть на нечетную координату, ему надо будет сделать нечетное количество прыжков. Чтобы попасть на четную координату, ему надо будет сделать четное количество прыжков. По условию задачи попасть ему надо в 0. Так что он сделает четное количество прыжков.

Задача 8. *На семи карточках написали числа 1, 2, 3, 4, 5, 6 и 7. Затем карточки перевернули, перемешали и на обратных сторонах написали те же числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Числа, написанные на обеих сторонах каждой карточки, сложили и полученные суммы перемножили. Четно или нечетно полученное произведение?*

Решение. Допустим, что произведение нечетно. Для этого все 7 множителей должны быть нечетными. Но тогда у четырех карточек, у которых на одной стороне написаны нечетные числа 1, 3, 5 и 7, на другой стороне должны быть числа четные. Однако четных чисел здесь только три. Следовательно, этот случай невозможен.