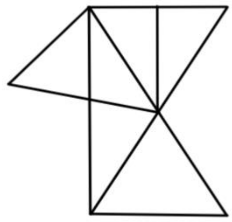
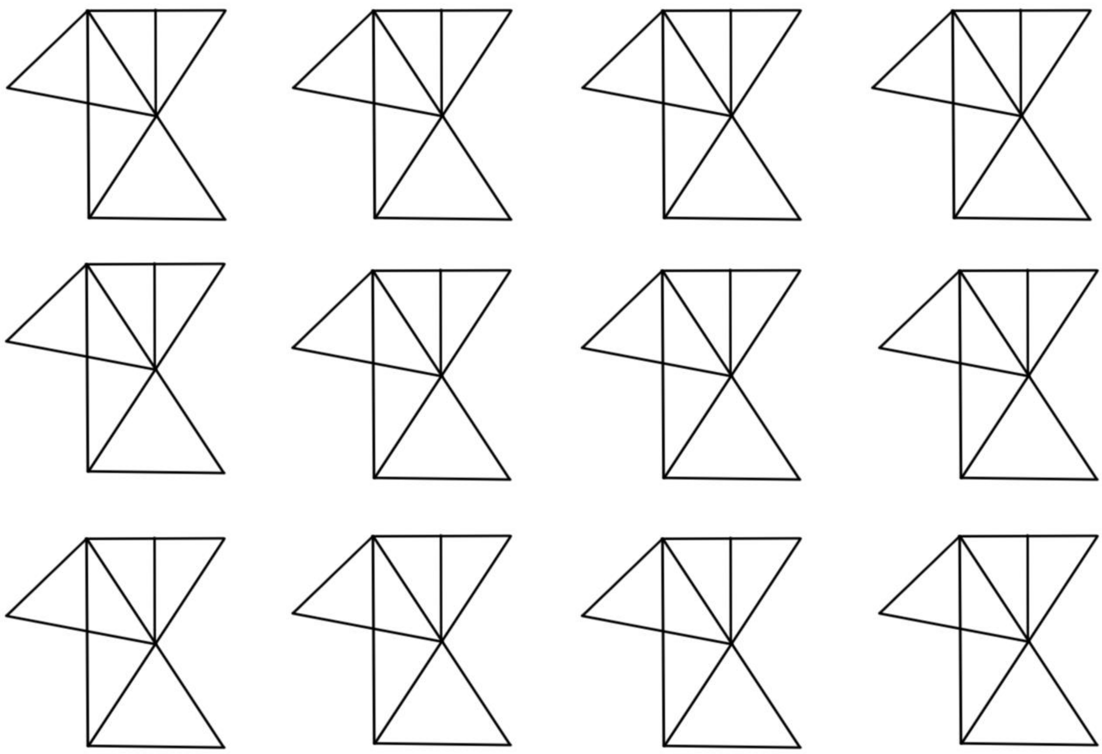
В этой теме мы будем учиться искать и считать определенные геометрические фигуры. Например, найдем, сколько разных треугольников на картинке справа.

Это можно сделать разными способами.



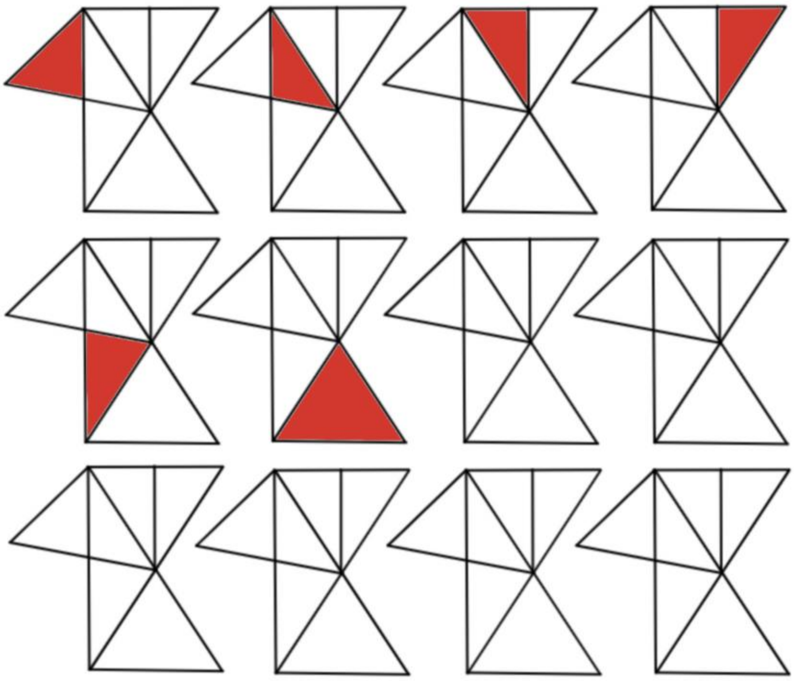
Способ 1. Начать считать «про себя» или водя карандашом, но ничего не записывая. Во-первых, велика вероятность ошибки. Во-вторых, вы не выполнили основную часть задачи, а именно никак не пояснили, что ответ именно такой.

Способ 2. Нарисовать много одинаковых фигур и начать их закрашивать. Способ удобный, но сложен в техническом исполнении (много рисовать или учиться копировать одинаковые формы на компьютере). Для этой задачи вам хватит такой заготовки:

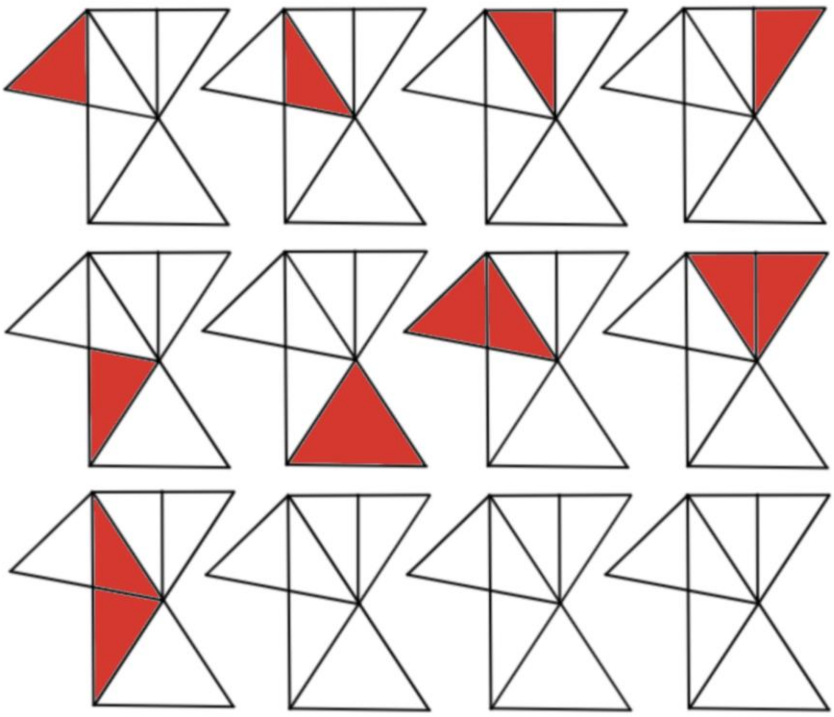


Удобство такой заготовки в том, что раскрашивая разные фигуры, вы сразу будете видеть повторения, если они начнут получаться. Но системность в раскрашивании все равно должна быть. Иначе не обоснуете, почему больше способов нет.

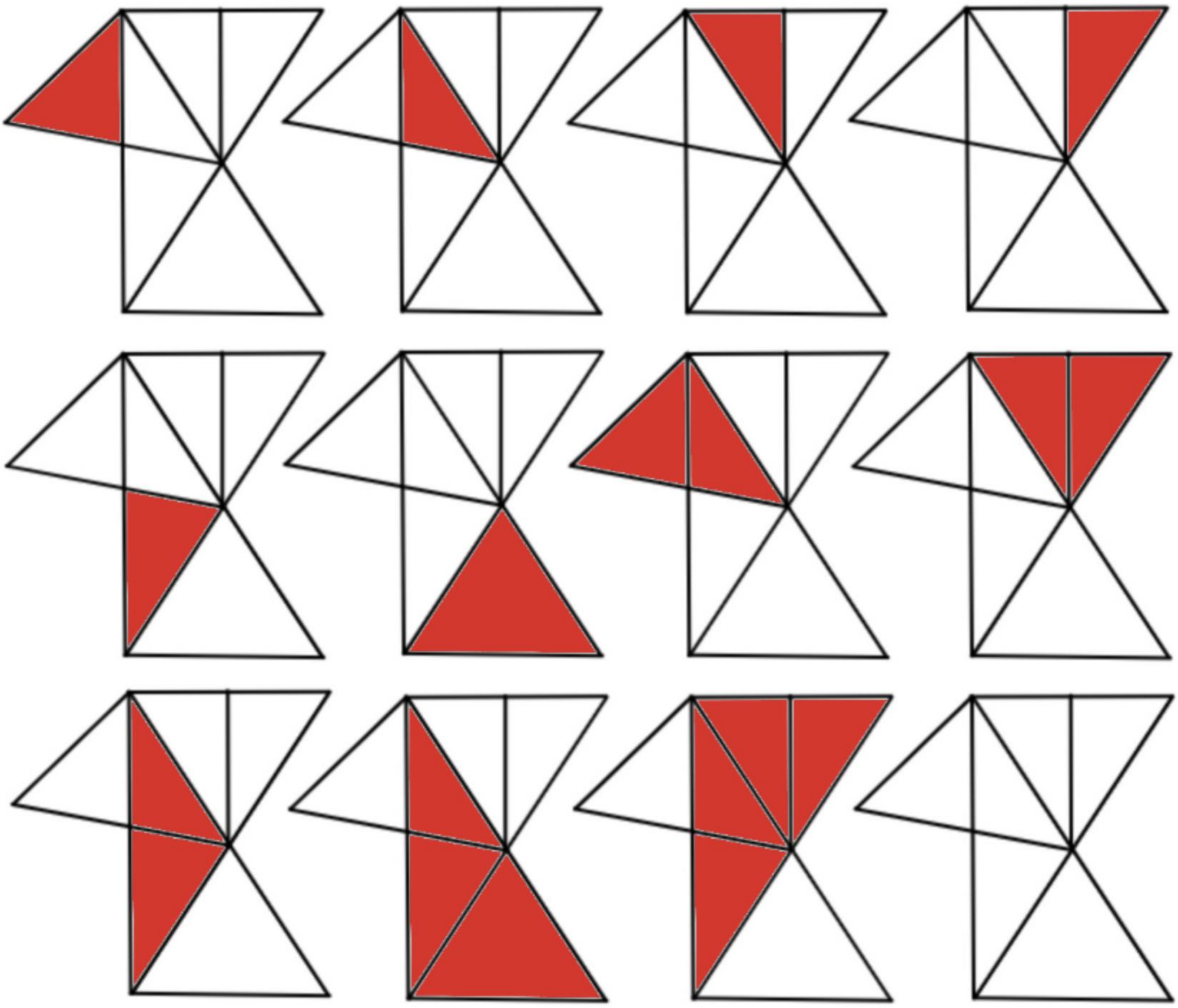
Шаг 1. Раскрасим все треугольники, которые состоят ровно из одного треугольника:



Шаг 2. Еще раскрасим все треугольники, которые состоят ровно из двух треугольников:

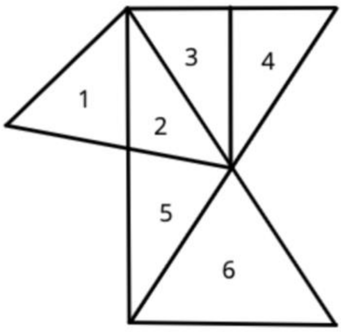


Шаг 3. Осталось раскрасить те, которые состоят из большего количества треугольников (здесь найдутся по одному, состоящему из трех и из четырех треугольников):



Всего 11 треугольников.

Способ 3. Что делать, когда нет возможности сделать такую заготовку? Давайте пронумеруем каждый одиночный треугольник. И каждый треугольник будем «кодировать» номерами тех частей, из которых он состоит.



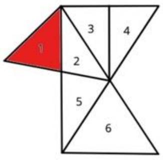
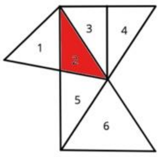
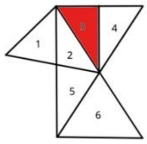
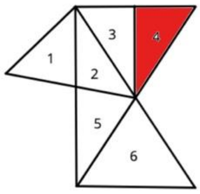
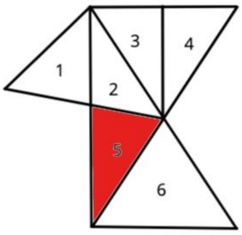
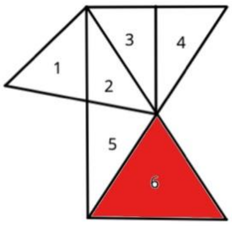
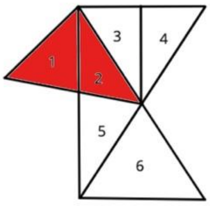
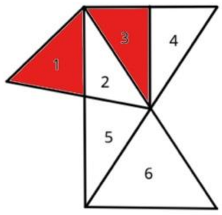
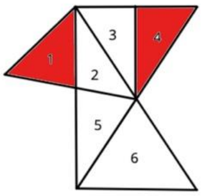
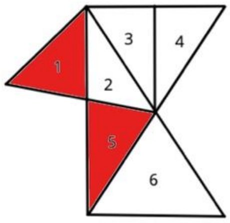
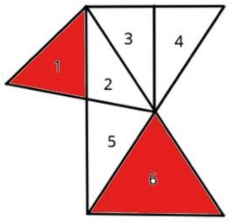
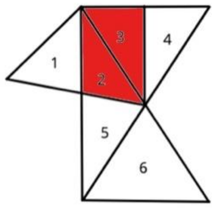
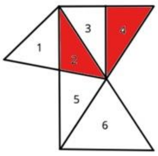
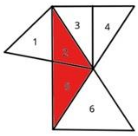
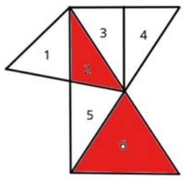
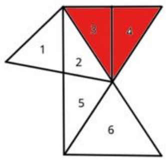
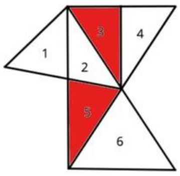
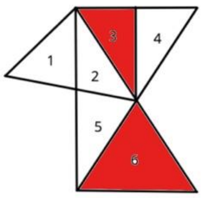
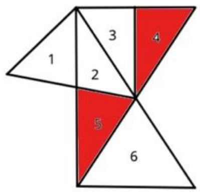
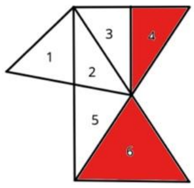
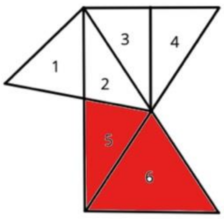
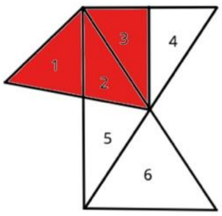
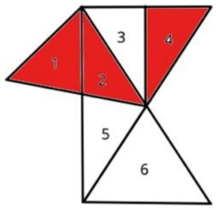
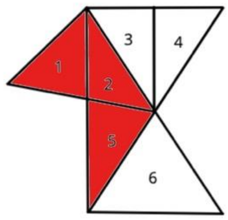
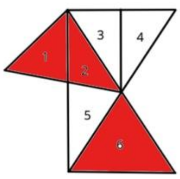
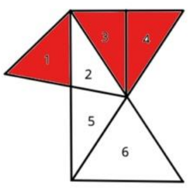
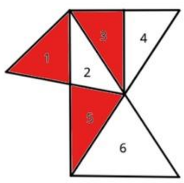
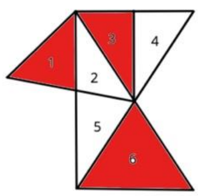
Выпишем все 11 треугольников в том же порядке, что и закрашивали в предыдущем способе.

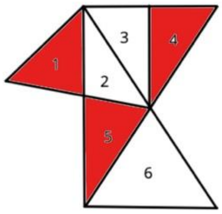
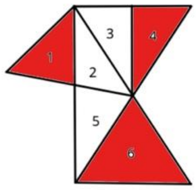
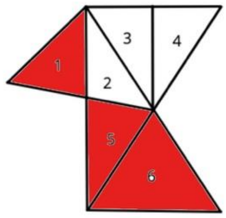
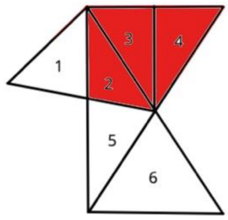
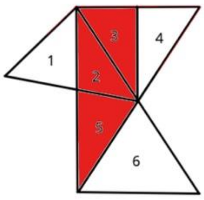
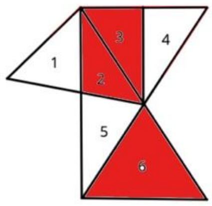
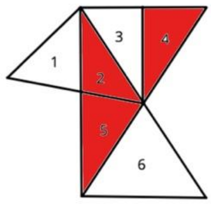
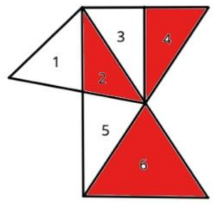
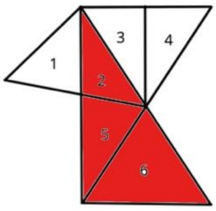
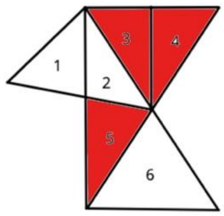
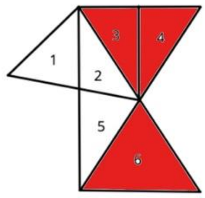
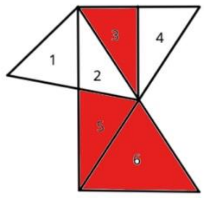
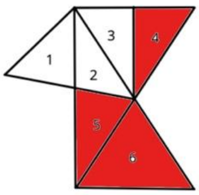
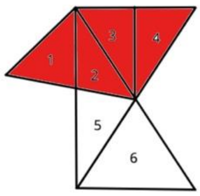
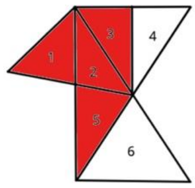
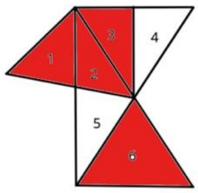
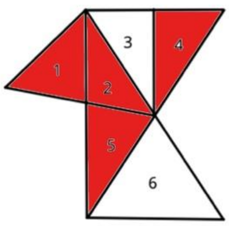
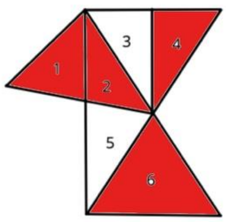
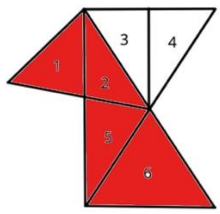
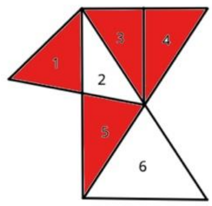
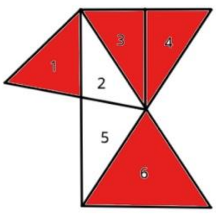
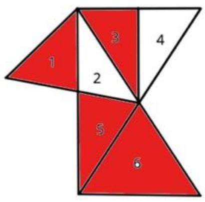
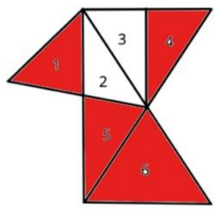
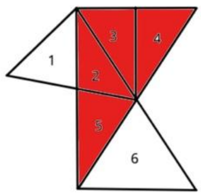
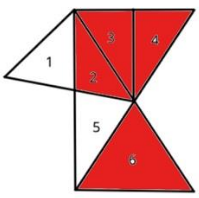
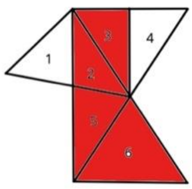
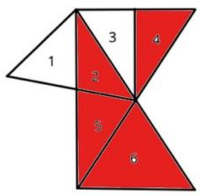
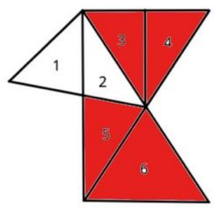
Порядковый номер	Номера частей
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	1, 2
8	3, 4
9	2, 5
10	2, 5, 6
11	2, 3, 4, 5

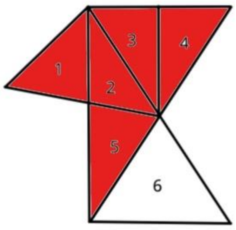
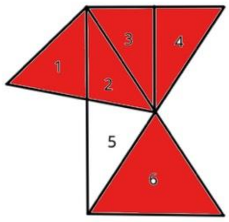
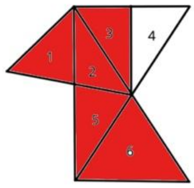
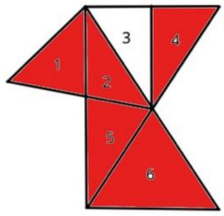
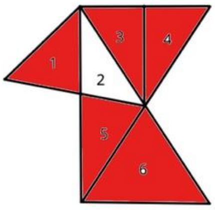
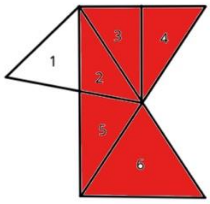
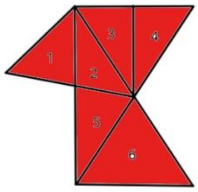
Способ 4. Сразу скажем, что способ совсем нерациональный (будет слишком много лишнего перебора), и его не надо применять. Но, когда подобные задачи решают на компьютере, то часто школьники старших классов используют именно его. Давайте выпишем все комбинации из частей, а потом проверим, действительно ли получился треугольник. Главное преимущество этого способа, что точно ничего не потеряем (выпишем больше, чем нужно и вычеркнем лишнее).

Заранее удобно запишем все варианты частей.

1	5	1,4	2,4	3,5	5,6	1,2,6	1,4,5	2,3,5	2,5,6	4,5,6	1,2,4,5	1,3,4,6	2,3,4,6	1,2,3,4,5	1,2,4,5,6
2	6	1,5	2,5	3,6	1,2,3	1,3,4	1,4,6	2,3,6	3,4,5	1,2,3,4	1,2,4,6	1,3,5,6	2,3,5,6	1,2,3,4,6	1,3,4,5,6
3	1,2	1,6	2,6	4,5	1,2,4	1,3,5	1,5,6	2,4,5	3,4,6	1,2,3,5	1,2,5,6	1,4,5,6	2,4,5,6	1,2,3,5,6	2,3,4,5,6
4	1,3	2,3	3,4	4,6	1,2,5	1,3,6	2,3,4	2,4,6	3,5,6	1,2,3,6	1,3,4,5	2,3,4,5	3,4,5,6	1,2,4,5,6	

1		2		3		4	
5		6		1 2		1 3	
1 4		1 5		1 6		2 3	
2 4		2 5		2 6		3 4	
3 5		3 6		4 5		4 6	
5 6		1 2 3		1 2 4		1 2 5	
1 2 6		1 3 4		1 3 5		1 3 6	

1 4 5		1 4 6		1 5 6		2 3 4	
2 3 5		2 3 6		2 4 5		2 4 6	
2 5 6		3 4 5		3 4 6		3 5 6	
4 5 6		1 2 3 4		1 2 3 5		1 2 3 6	
1 2 4 5		1 2 4 6		1 2 5 6		1 3 4 5	
1 3 4 6		1 3 5 6		1 4 5 6		2 3 4 5	
2 3 4 6		2 3 5 6		2 4 5 6		3 4 5 6	

1 2 3 4 5		1 2 3 4 6		1 2 3 5 6		1 2 4 5 6	
1 3 4 5 6		2 3 4 5 6		1 2 3 4 5 6			

Грамотная с математической точки зрения запись ответа.

В геометрии для того, чтобы указать на объект, надо указать его вершины. Обозначим все вершины на рассматриваемой картинке и выпишем в ответ все треугольники, которые сможем найти. Слева написаны части, которыми удобнее обозначать, когда происходит перебор.

1 – ABH

2 – BHE

3 – BCE

4 – CDE

5 – HEG

6 – EGF

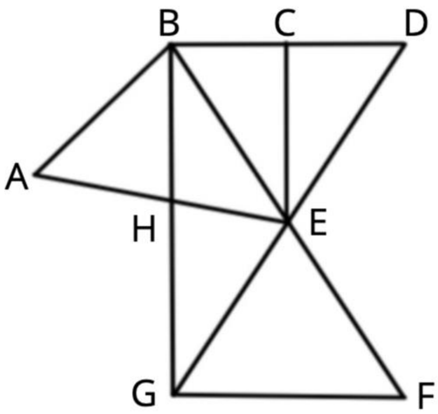
1,2 – ABE

3,4 – BDE

2,5 – BEG

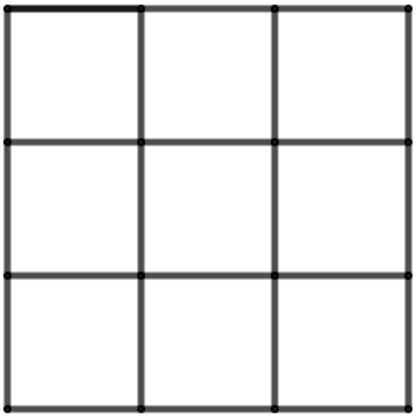
2,5,6 – BGF

2,3,4,5 – BDG



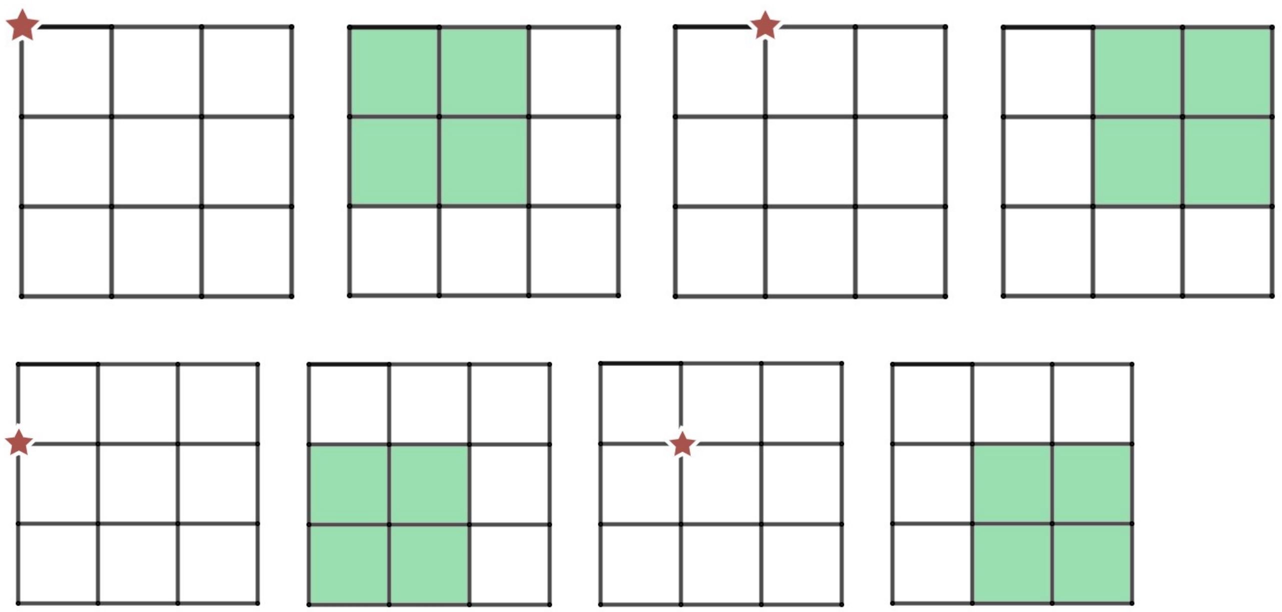
Хитрости. Бывает, что не надо заниматься перебором, а можно заметить некоторую особенность конструкции, которая позволит быстро сосчитать все. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Сколько на рисунке квадратов?



Способ 1. Квадратов 1×1 здесь 9 штук.

Для того, чтобы посчитать, сколько квадратов 2×2, отметим узлы сетки, которые могут быть левой верхней вершиной. Для наглядности все изобразим так: слева отмечена вершина, справа квадрат, который ей соответствует.



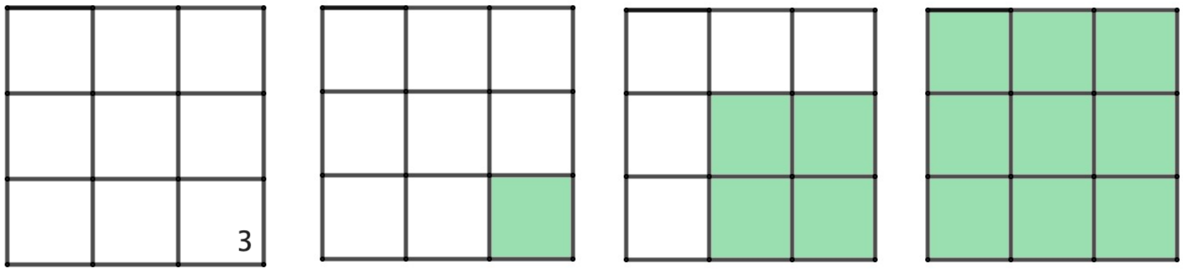
Другие узлы не могут быть левыми верхними вершинами, иначе квадрат не влезет.

Квадратов 2×2 здесь 4 штуки.

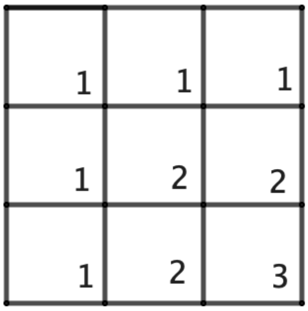
Квадрат 3×3, очевидно, только один.

Способ 2. На каждом узле напишем количество квадратов, у которого этот узел может быть правой нижней вершиной.

Рассмотрим для примера одну вершину. Ей соответствуют 3 квадрата.



Подпишем таким образом все вершины, а потом сложим.



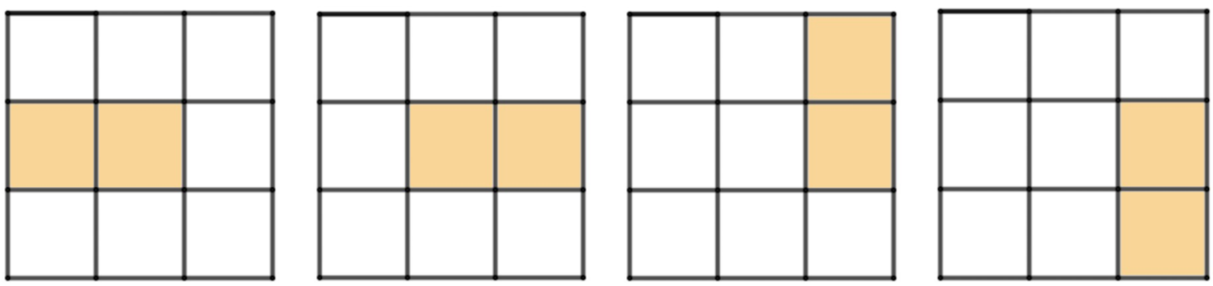
<u>Ответ:</u> 14 квадратов.

Пример 2. Сколько прямоугольников на этом же рисунке?

Способ 1. Квадраты посчитали в прошлой задаче. Осталось посчитать прямоугольники, которые не являются квадратами. Всякий квадрат – это прямоугольник. Но не всякий прямоугольник – это квадрат.

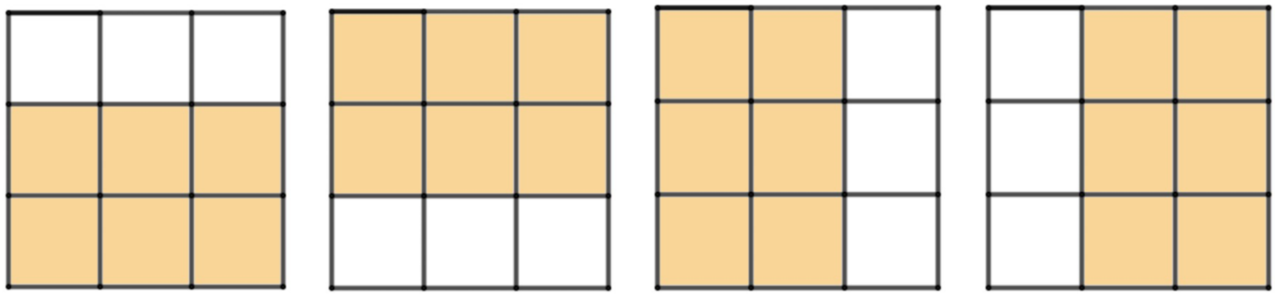
Размеры прямоугольников: 1×2 или 2×1, 1×3 или 3×1, 2×3 или 3×2.

В каждой строке и в каждом столбце 2 прямоугольника 1×2 или 2×1. Поэтому всего таких прямоугольников $2 \cdot 6 = 12$.



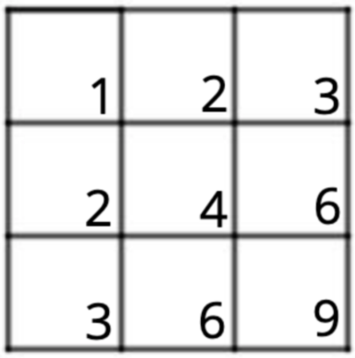
Прямоугольников 1×3 или 3×1 будет столько же, сколько в сумме столбцов и строк, то есть 6.

Прямоугольников 2×3 или 3×2 столько же, сколько квадратов 2×2 (каждый квадрат можно «продлить» в прямоугольник). Всего: 4.

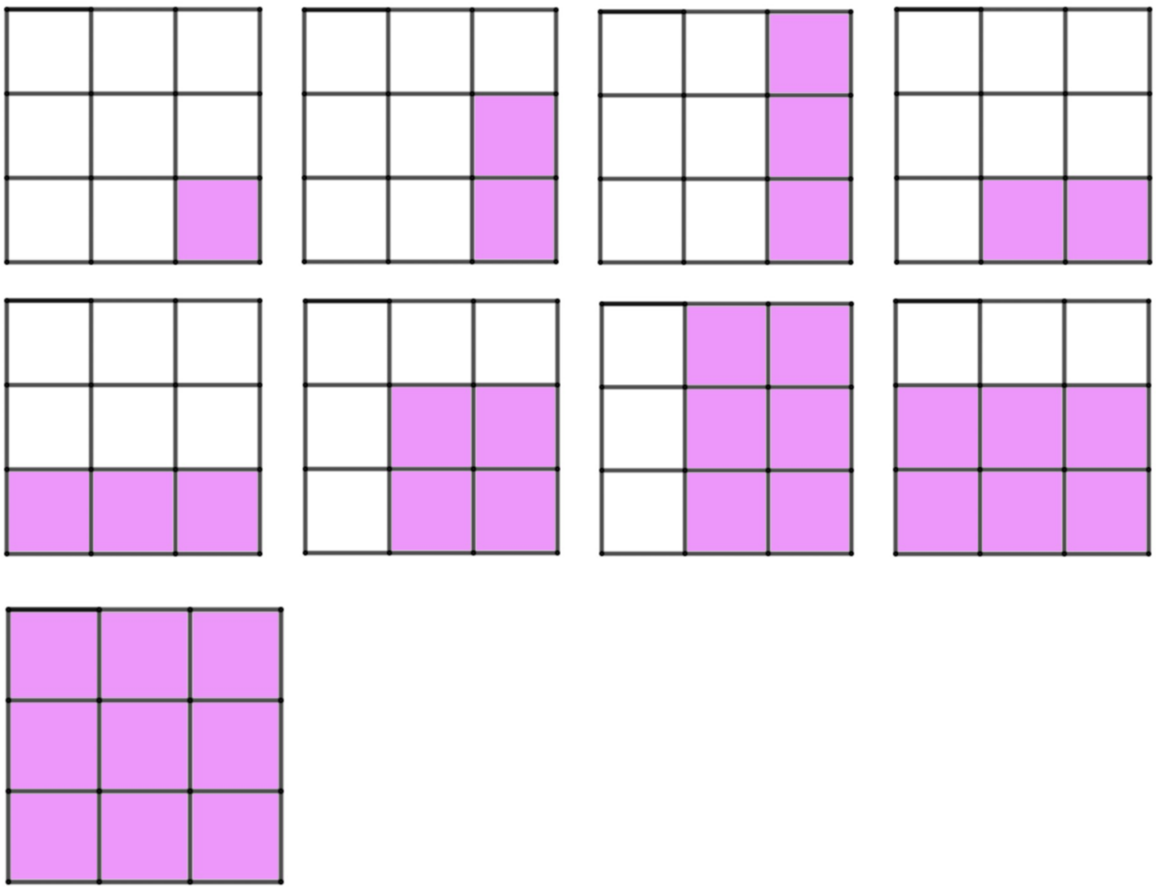


Итого: 14 квадратов + 22 только что посчитанных прямоугольника = 36.

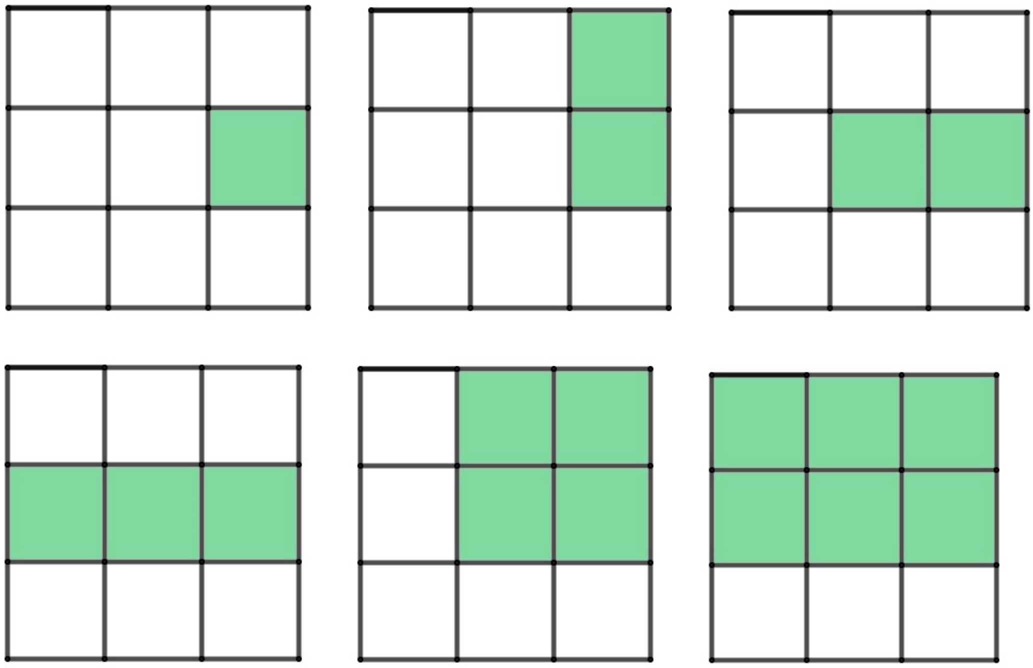
Способ 2. На каждом узле напишем количество квадратов, у которого этот узел может быть правой нижней вершиной. Здесь будем учитывать и квадраты. Вот финальный результат:



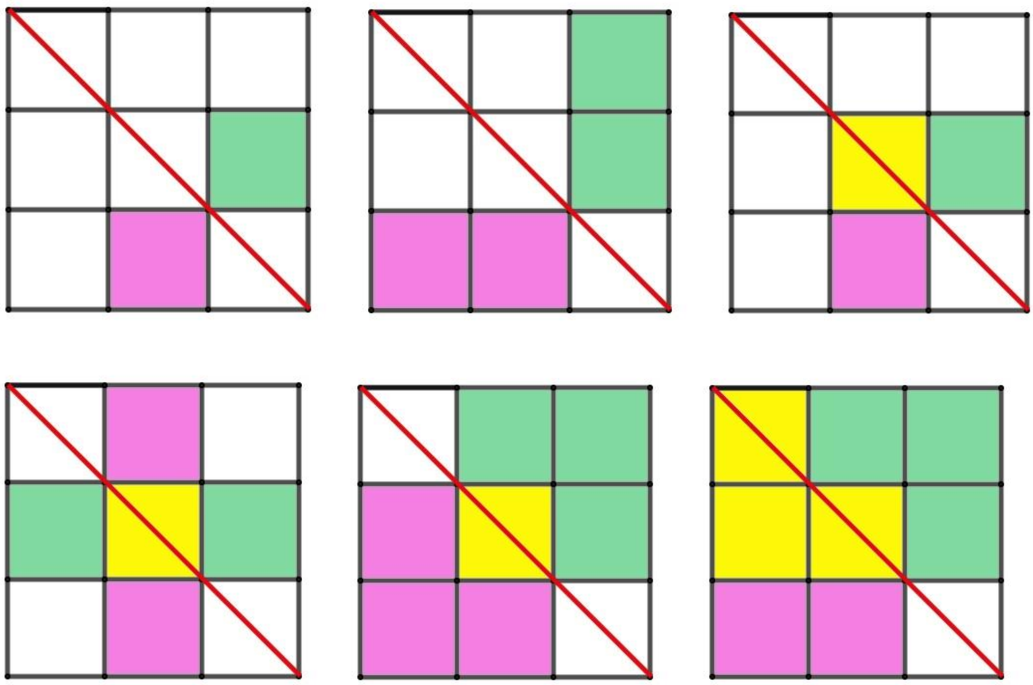
Покажем, как получилось 9:



Покажем, как получилось одно из чисел 6.



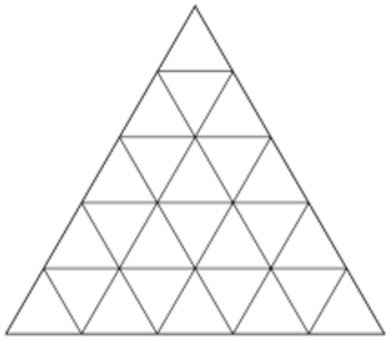
Для второй вершины можно и не считать. А заметить, что квадрат симметричен относительно диагонали. Для 6 квадратов выше приведем фигуры, симметричные относительно диагонали квадрата, которая отмечена красным. Исходные фигуры – зеленые, симметричные им – сиреневые, если квадрат принадлежит и исходной фигуре, и полученной после симметрии, то он покрашен в желтый цвет.



Итоговый ответ: 1+2+3+2+4+6+3+6+9=(1+9)+(3+3+4)+(2+2+6)+6=10+10+10+6=36.

Для быстрого счета мы воспользовались тем, что можно менять слагаемые местами, при этом сумма не изменится.

Пример 3. На рисунке изображена сетка, состоящая из 25 равносторонних треугольников.



Сколько ромбов можно составить из двух соседних маленьких треугольников?

Решение. Заметим, что каждому ромбу соответствует одна внутренняя сторона. Подсчитав все внутренние стороны получаем ответ – 30 ромбов.

Ответ: 30.