

**Элементарная
геометрия на бутылке
Клейна
(первые шаги)**

**Ученик 9 класса, МБОУ
ММЛ, г. Мурманска,
Верещагин Никита**

Цель исследования

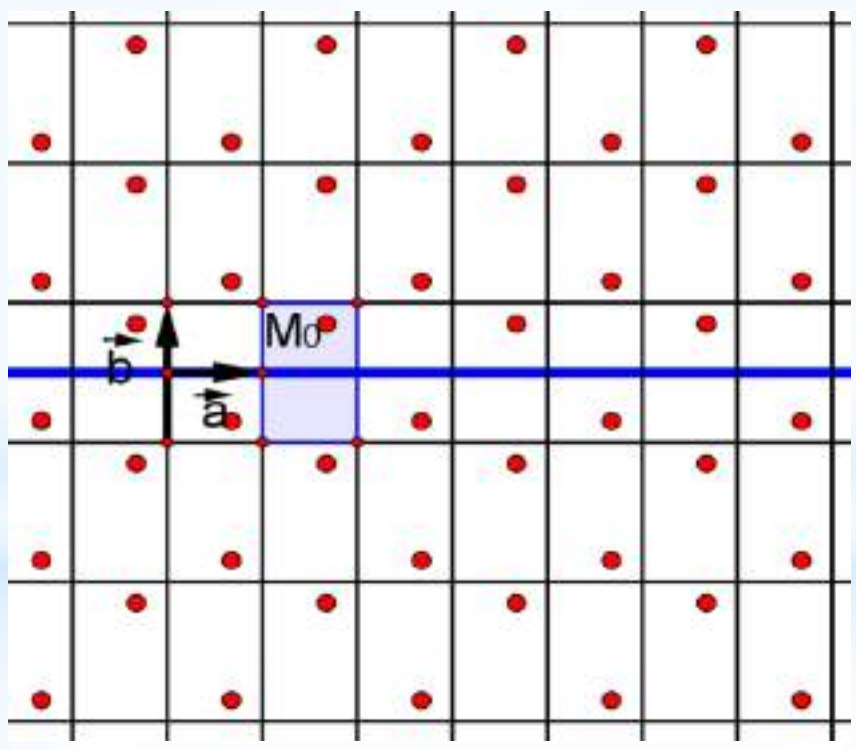
Мы хотим изучить простейшие свойства отрезков, прямых, треугольников и окружностей на бутылке Клейна.

Задачи исследования

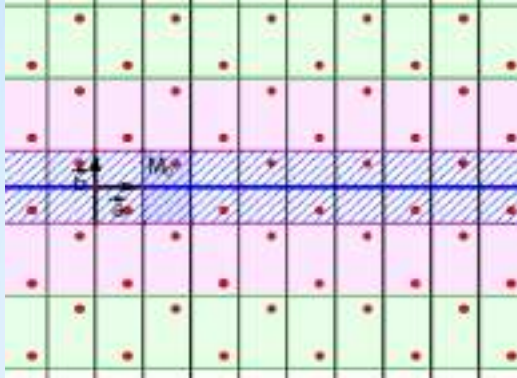
- 1) перенести методы исследования фигур на листе Мёбиуса для бутылки Клейна;***
- 2) найти аналитические методы исследования свойств фигур на бутылке Клейна.***

Определение бутылки Клейна

$$M_{\mathbb{Z}^2} = \left\{ M_{m;n} \mid M_{m;n} = T_b^m (S_{l;a}^m (M_0)); (m;n) \in \mathbb{Z}^2 \right\}$$



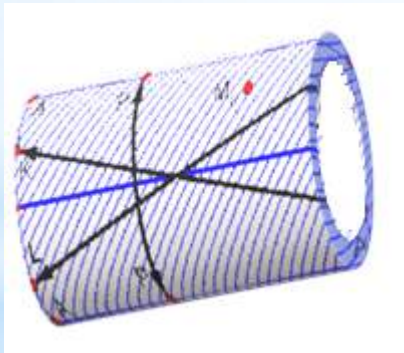
Интуитивное определение



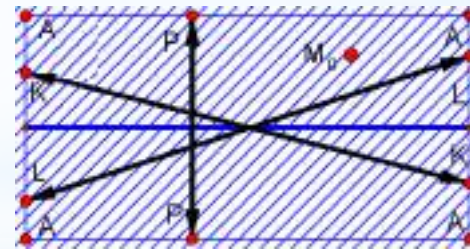
1. Накрывающая плоскость



2. Склейка в цилиндрическую поверхность



3. Склейка в цилиндр



4. Правило склейки в бутылку Клейна

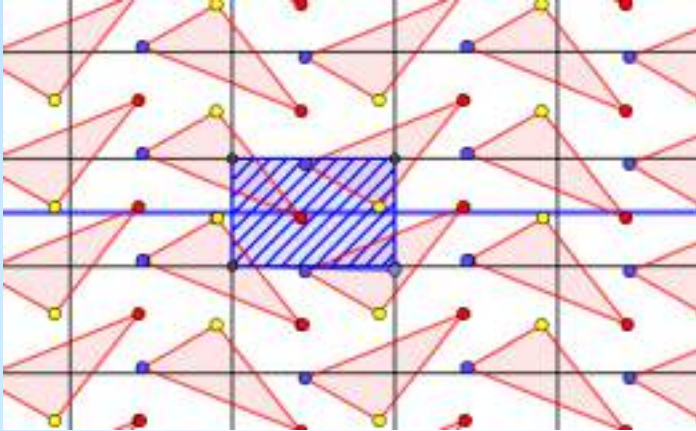
Определение

Бутылка Клейна

**получается из плоскости
после склеивания точек
каждой орбиты так, что точки
одной орбиты склеиваются в
одну точку, а разных – в
разные**

Эта плоскость называется накрывающей

Фигуры на бутылке Клейна

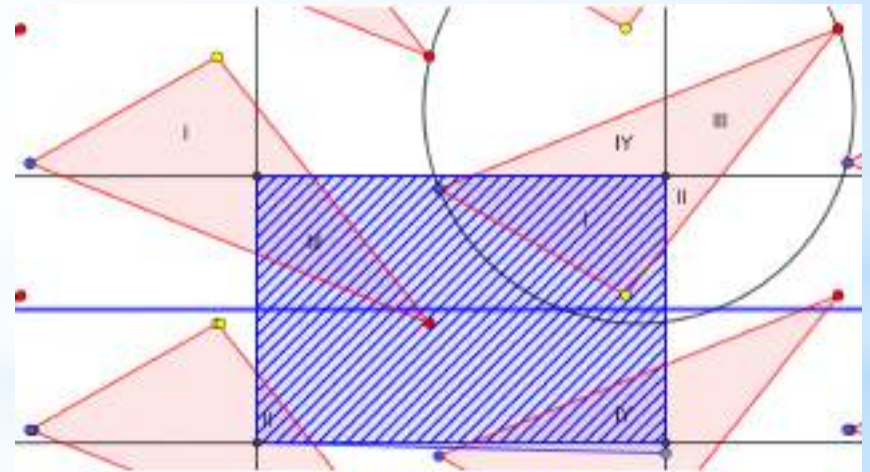


1. Орбита треугольника на
накрывающей плоскости

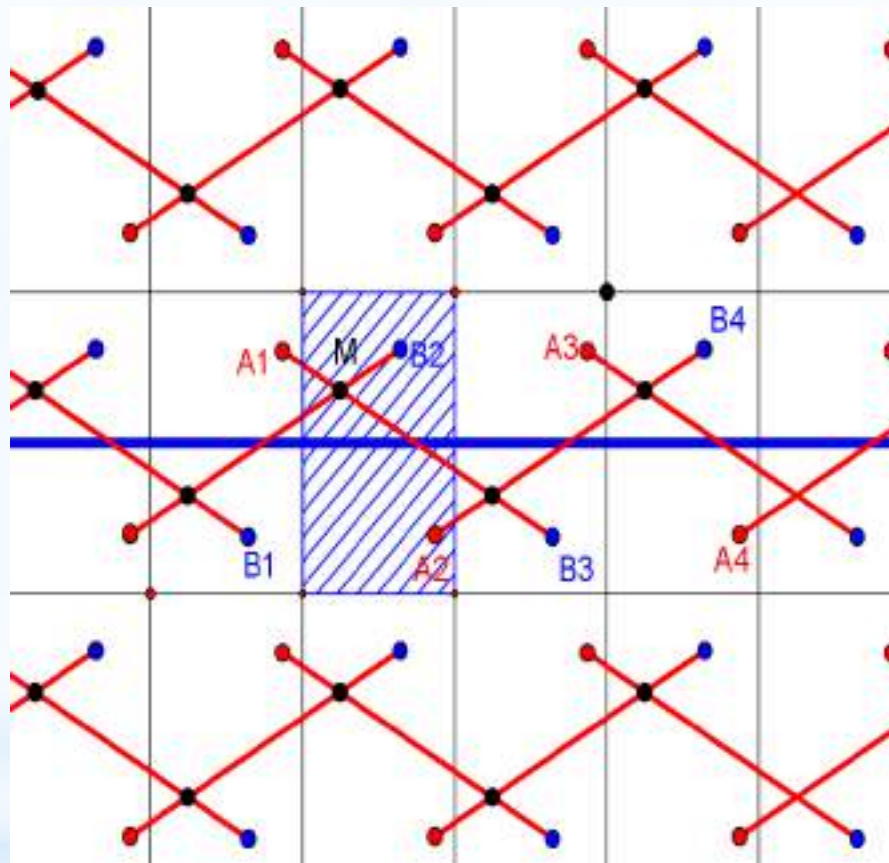
Вывод 1

*Точки орбит фигуры на фундаментальной области,
полностью иллюстрируют их вид на бутылке Клейна.*

2. Треугольник на
фундаментальной области



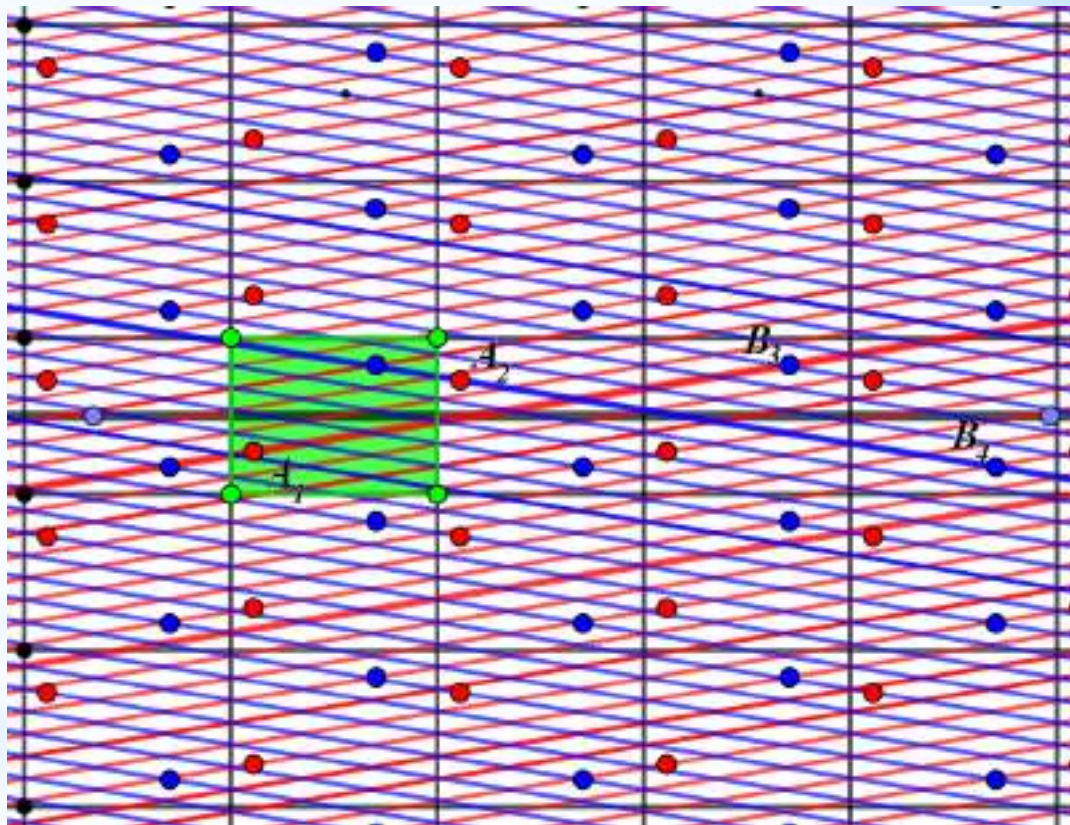
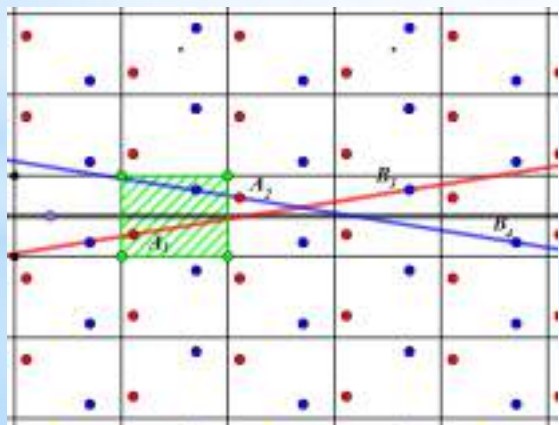
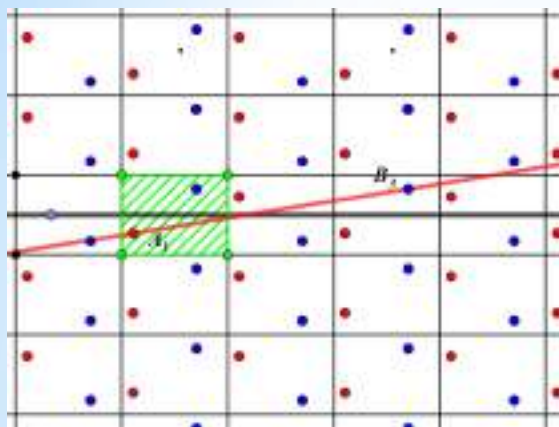
Отрезки на бутылке Клейна



Вывод 2

- 1. Отрезки могут пересекать себя.*
- 2. Длина отрезка и расстояние между его концами не обязательно равны.*

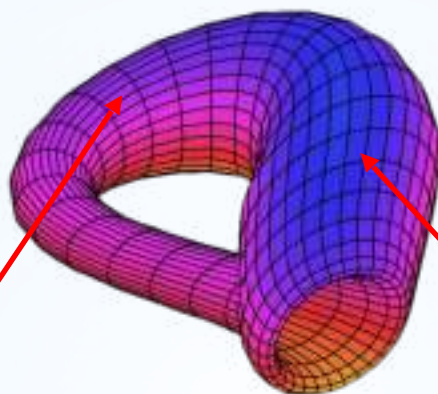
Прямые 1 на бутылке Клейна



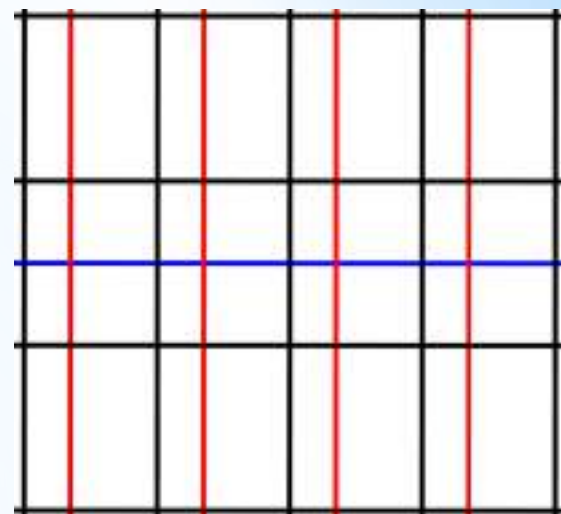
Прямые 2 на бутылке Клейна



параллель



Вывод 3

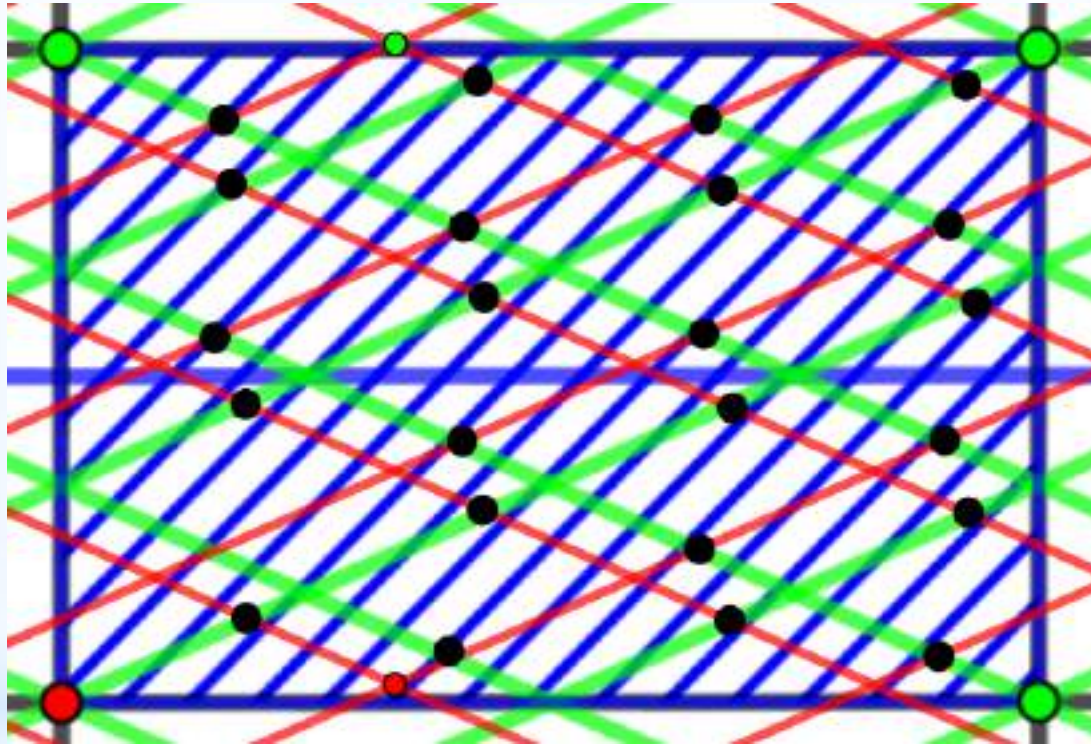


меридиан

Прямые на бутылке Клейна могут быть

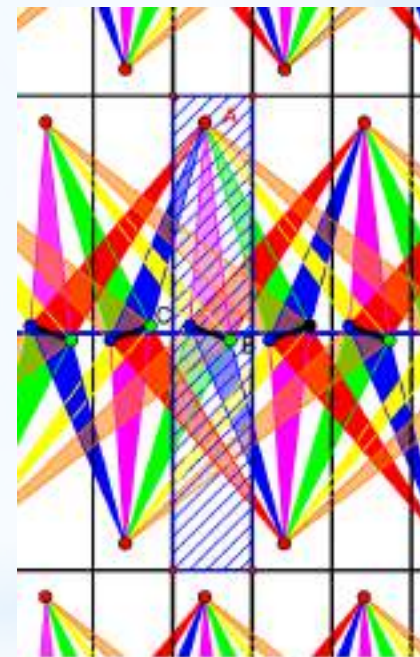
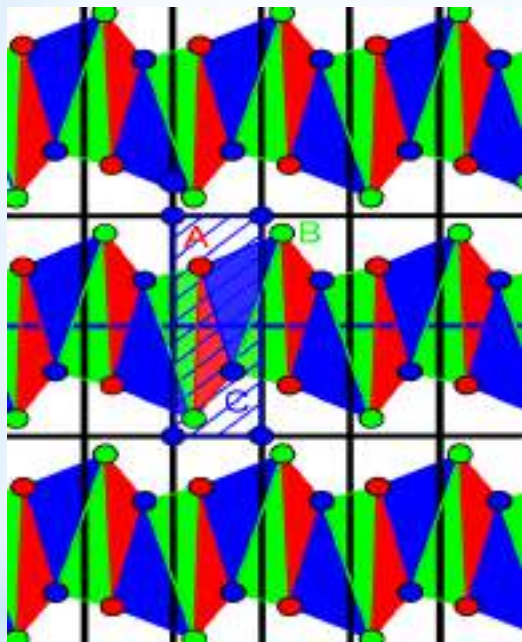
- 1) замкнутые;**
- 2) бесконечной длины.**

Параллельные прямые



*Орбиты двух параллельных прямых.
На бутылке Клейна эти прямые
пересекаются.*

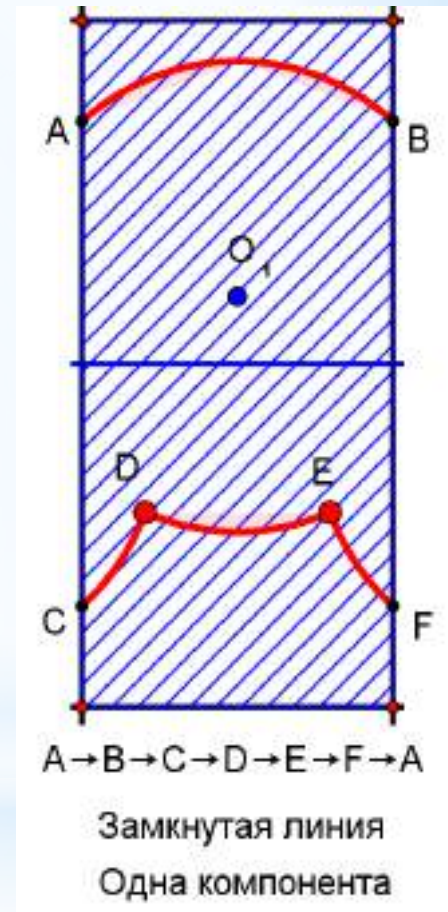
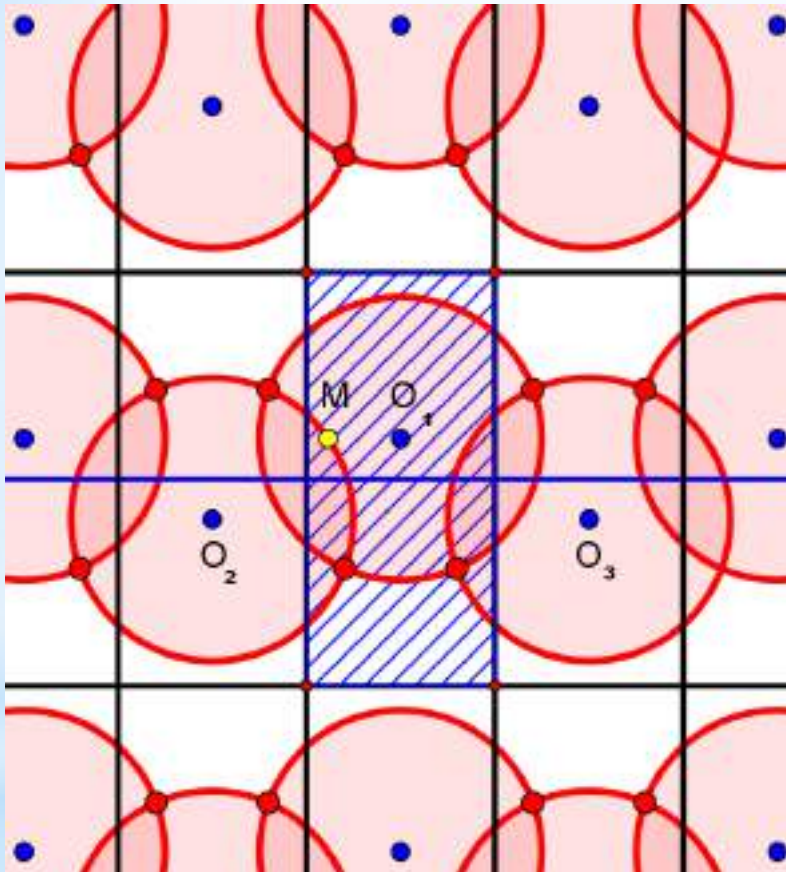
Треугольники с данными вершинами ABC

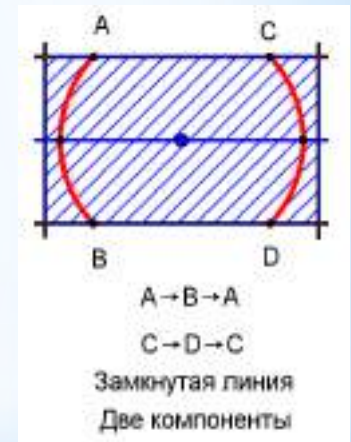
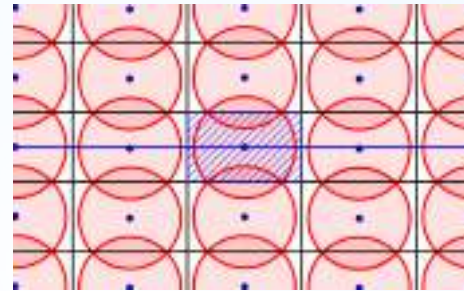
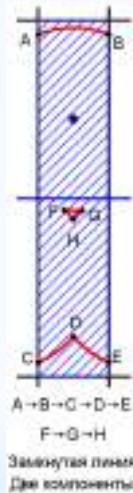
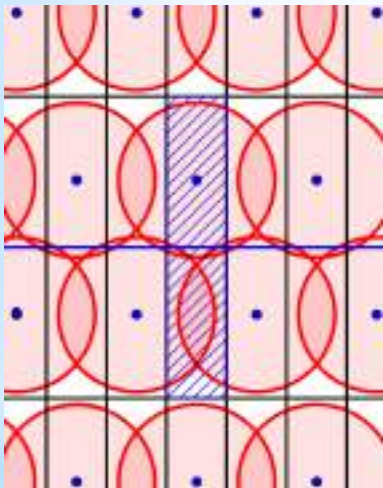
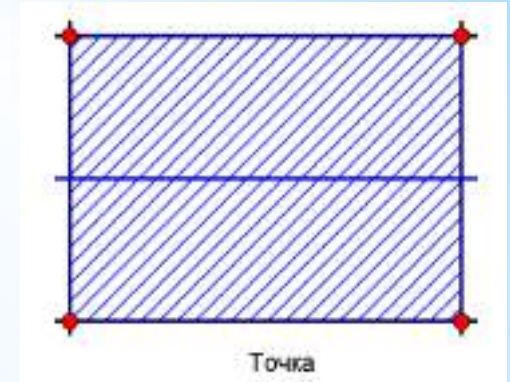
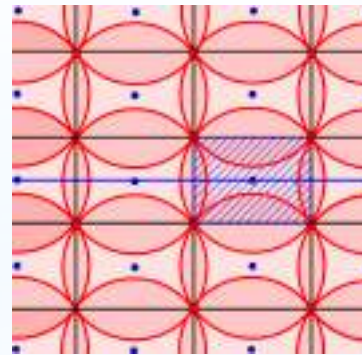
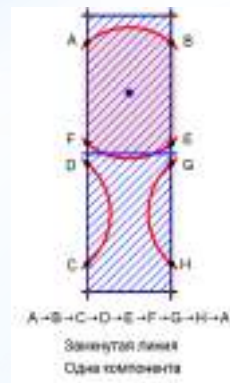
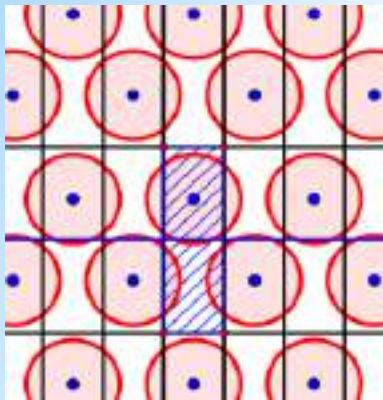


Вывод 5.

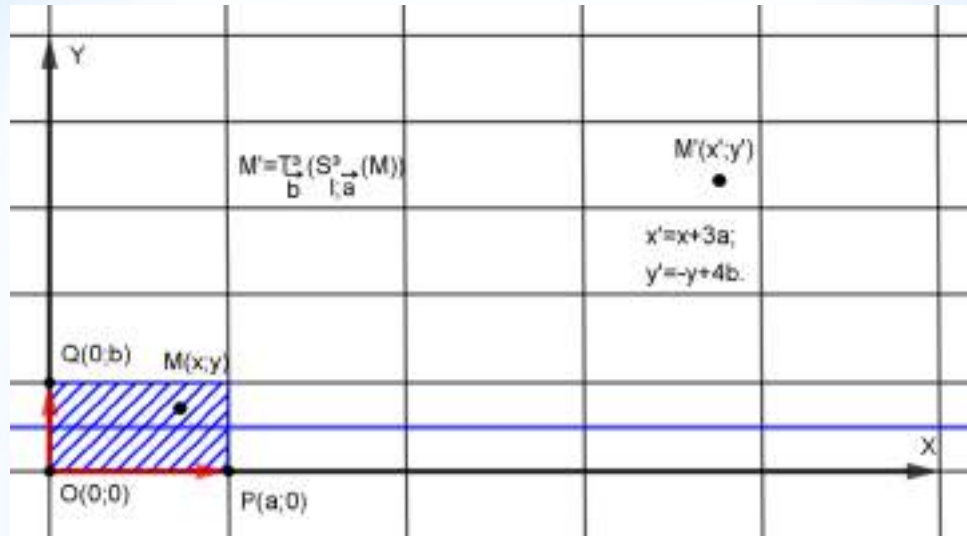
На бутылке Клейна существует больше одного треугольника с заданными вершинами, и даже если одна его сторона фиксирована.

Окружности





Вывод 6. Окружности на бутылке Клейна представляют собой замкнутую линию, состоящую из одной или двух компонент.



$$T_{b, l; a}^k : \begin{cases} x' = x + ka \\ y' = (-1)^k y + \frac{1+2l-(-1)^k}{2} b \end{cases}$$

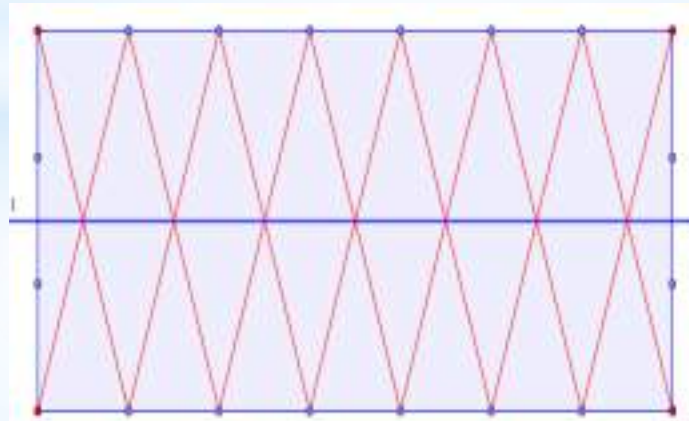
$$P : \begin{cases} x' = x - ka \\ y' = (-1)^k y - \frac{1+2l-(-1)^k}{2} (-1)^k b \end{cases}$$

$$s: y = 3x$$

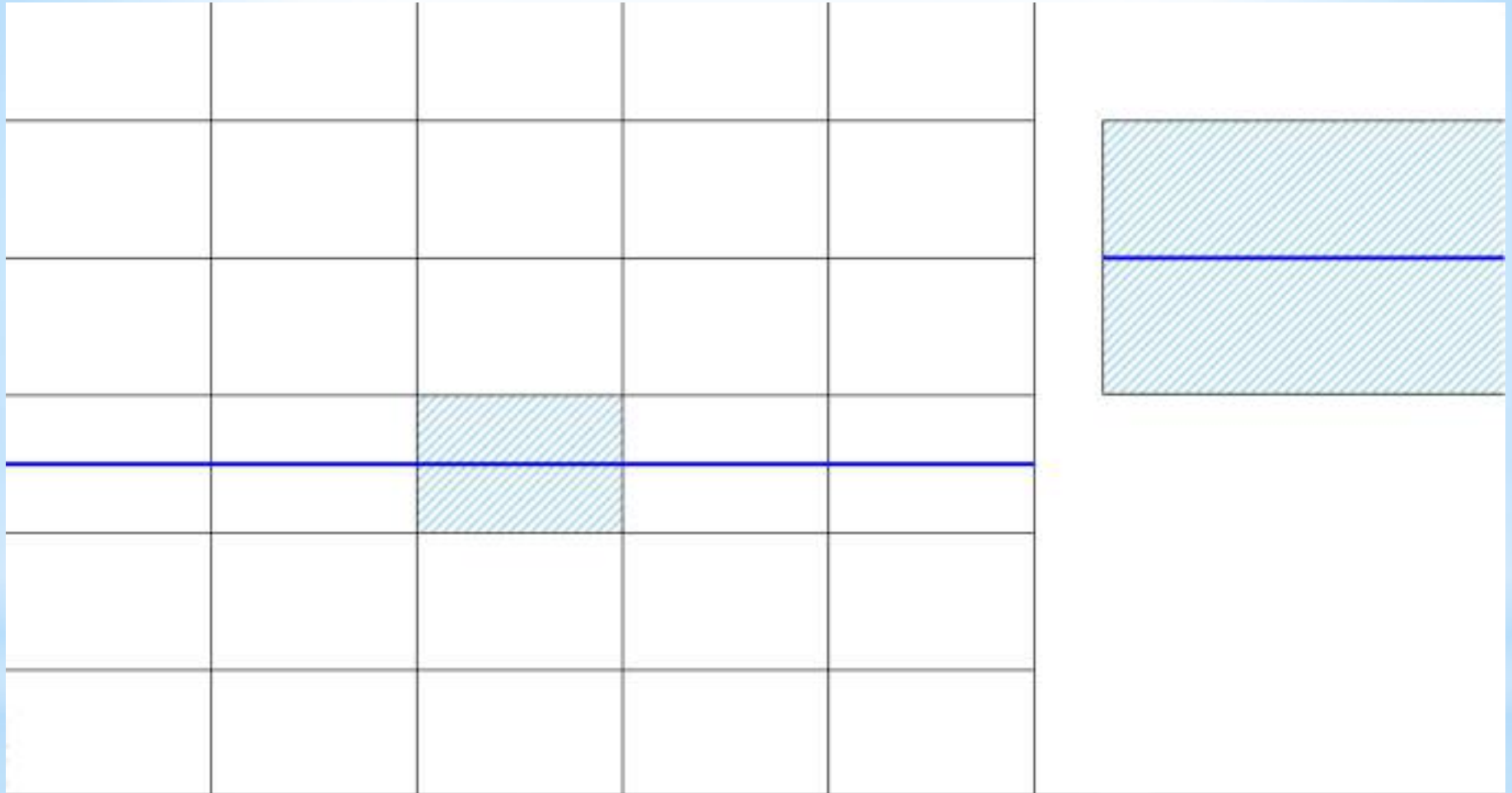
$$P(s) : (-1)^k y + \frac{1+2l-(-1)^k}{2} 3 = 3(x + k7), a = 7, b = 3.$$

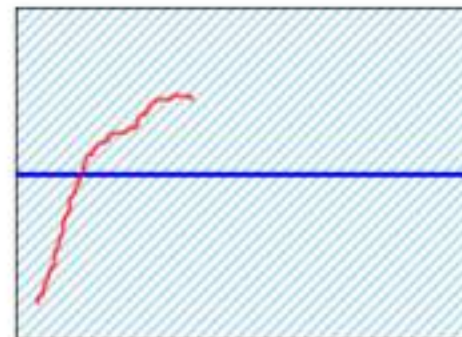
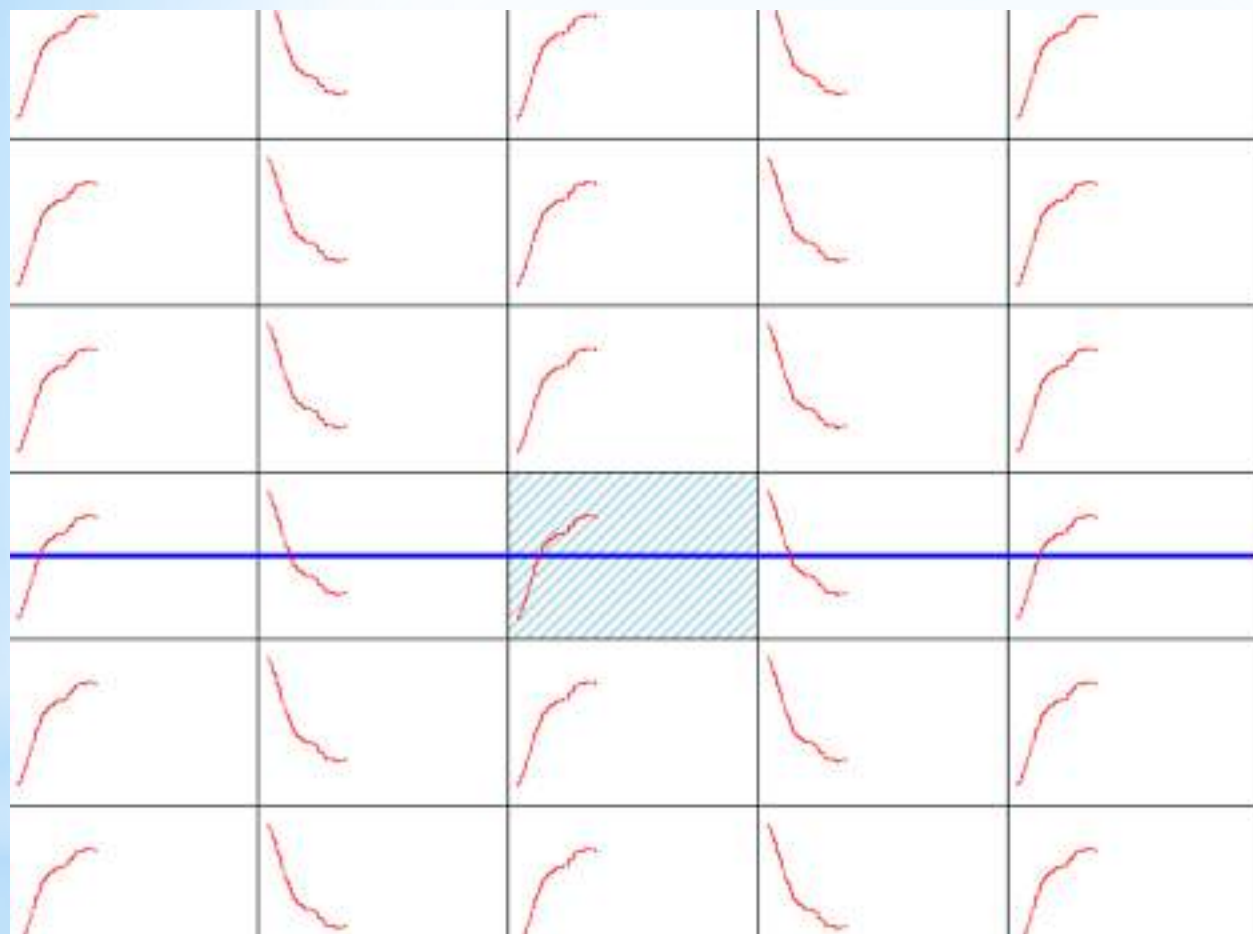
$$(-1)^k y + \frac{l+2l-(-1)^k}{2} b = 3(x + ka)$$

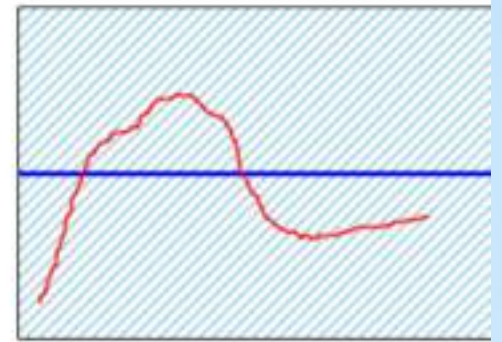
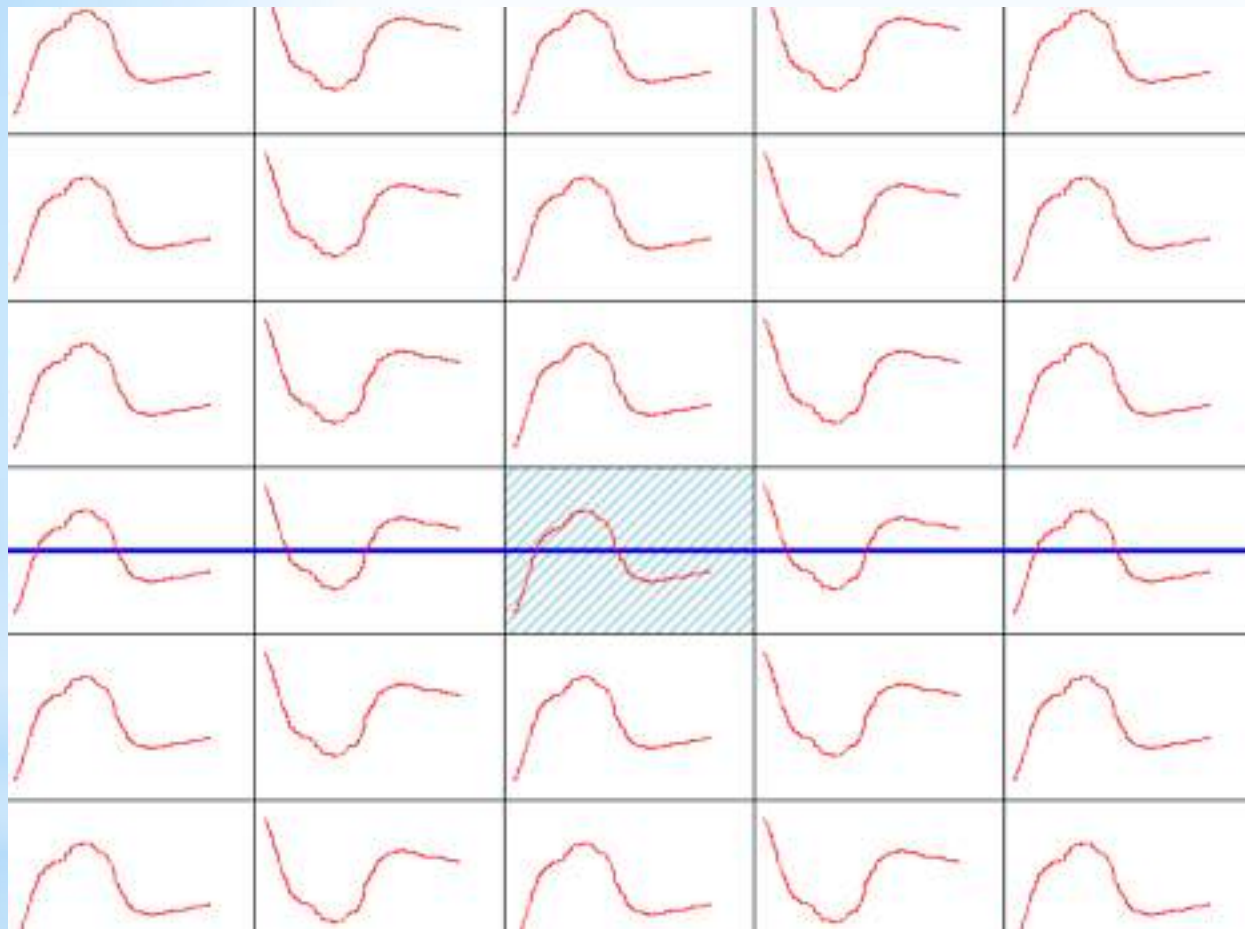
k-чётное			k-не чётное		
<i>k</i>	<i>l</i>		<i>k</i>	<i>l</i>	
-2		$y = 3x - 3l - 42$	-1		$y = -3x + 3l - 18$
	-15	$Y=3x+3$		6	$Y=-3x$
	-14	$Y=3x$		7	$Y=-3x+3$
	-13	$Y=3x-3$		8	$Y=-3x+6$
	-12	$Y=3x-6$		9	$Y=-3x+9$
	-11	$Y=3x-9$		10	$Y=-3x+12$
	-10	$Y=3x-12$		11	$Y=-3x+15$
	-9	$Y=3x-15$		12	$Y=-3x+18$
	-8	$Y=3x-18$		13	$Y=-3x+21$
	-7	$Y=3x-21$		14	$Y=-3x+24$



Скриншоты программы







Заключение

В результате исследования нами получены следующие результаты:

1. Сформулированы свойства из наглядной геометрии простейших фигур бутылки Клейна.

2. Разработан один из аналитических методов исследования свойств фигур.

Все полученные результаты являются новыми.

Я уже получил результаты о перемещениях на бутылке Клейна и меня интересуют аналогичные проблемы для локально-лобачевских поверхностей и более глубокое изучение геометрии цилиндра, листа Мёбиуса и бутылки Клейна.

Список источников

1. Никулин В.В., Шафаревич И.Р. Геометрии и группы. М.: Наука, 1983.
2. Н. Верещагин. Свойства фигур на листе Мёбиуса, доклад в марте 2019 года на Всероссийском форуме научной молодежи «Шаг в будущее», г. Москва.
3. Н. Верещагин. Перемещения на листе Мёбиуса, Научные труды молодых исследователей программы «Шаг в будущее», Том 22.
4. Бутылка Клейна: <https://dic.academic.ru/dic.nsf/ruwiki/52754>.
5. Бутылка Клейна: свойства и применение - Читайте подробнее на SYL.ru: <https://www.syl.ru/article/80704/butyilka-kleyna-svoystva-i-primenenie>.