

Международная научная конференция школьников
«XXI Колмогоровские чтения»

Математическая модель висячих мостов

Козаев Сармат, 9 класс, МБОУ СОШ №42, ВЦНМО, Владикавказ
Сланов Алан, 8 класс, РФМЛИ, ВЦНМО, Владикавказ
Руководитель – к. пед. н. Абатурова Вера Сергеевна

3-6 мая 2021, Москва, СУНЦ МГУ

В докладе рассматривается процесс построения математической модели висячего моста, а также показано, что при наличии некоторых условий висячие мосты строить более целесообразно, чем другие виды мостов.



Golden Gate, Сан-Франциско



Клифтонский висячий мост, Бристоль

Цель исследования – построить математическую модель висячего моста.

Вопросы на которые надо ответить:

1. Что такое висячий мост?
2. Чем отличаются висячие мосты от балочных?
3. Какое условие обеспечивает устойчивость висячего моста?
4. Как построить графическую модель висячего моста?
5. Какая функция является математической моделью висячего моста?

Висячие мосты становятся все более и более популярны по всему миру. Однако, в России строительство висячих мостов пока не получило такого большого развития, как, например, в США, Англии, Франции и других странах. Примером висячего моста в России является Крымский мост через Москву-реку, представленный на фото.



1.

Что такое висячий мост?

Мост – это сооружение, возведенное над каким-либо препятствием, например, через водоём, дорогу, овраг.

Висячий мост – это мост, в котором основная несущая конструкция выполнена из гибких элементов (кабелей, канатов и др.), работающих на растяжение, и к которым прикреплены тросы, а проезжая часть (полотно моста) подвешена. Тросы находятся на равных расстояниях друг от друга.



1. Что такое висячий мост?

Конструкция висячего моста содержит:

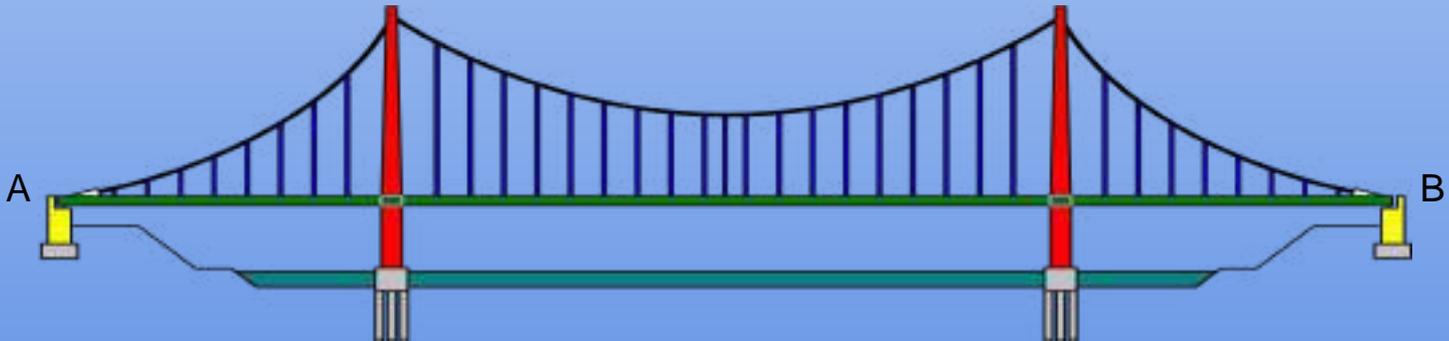
Пилон – это несущий элемент всей конструкции, который представляет собой опору висячего моста в виде рамы (на рисунке показан **красным**).

Закрепленные оттяжки – это закрепленные конструкции, которые растягивают кабель (на рисунке показаны **желтым**).

Кабель – это «провод», держащий всю конструкцию моста (на рисунке показан **черным**).

Трос – это «веревка», которая соединяет кабель с дорогой (на рисунке показан **синим**).

Полотно моста – это пролетное строение (АВ), обеспечивающее движение транспортных средств и пешеходов. (на рисунке показано **зеленым**).



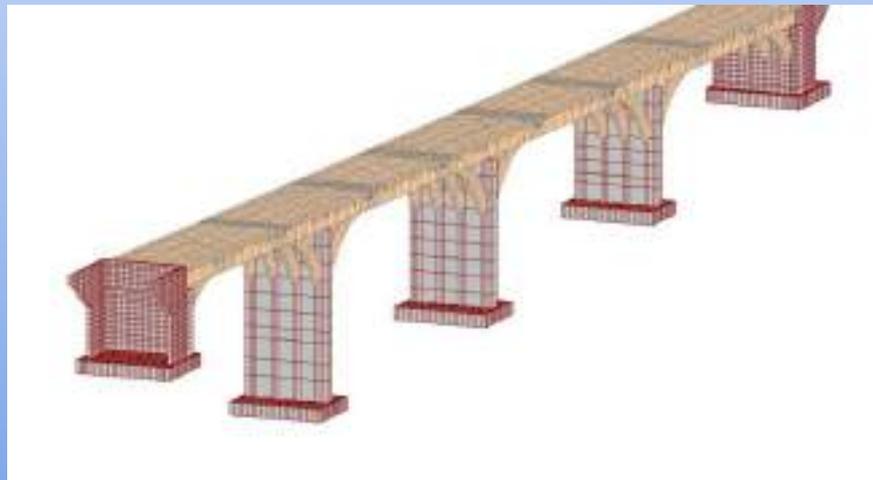
Самый длинный висячий мост в мире

Самый длинный висячий мост в мире это мост Акаси-Кайке (Япония). Длина пролета – 1991 м, а общая длина – 3911 м. Высота – 282,8 м. Мост выдерживает скорости ветра до 80 м/с, землетрясения магнитудой до 8,5 и сильные морские течения. Сейчас мостом пользуется в среднем 25 тысяч транспортных средств ежедневно. Когда в 1995 году оба троса были уже протянуты, и можно было приступать к монтажу дорожного полотна, произошло непредвиденное: 17 января 1995 года город Кобе стал жертвой крупного землетрясения магнитудой в 7,3. Пилоны выдержали землетрясение, но из-за изменения рельефа дна пролива Акаси один из пилонов сдвинулся на 1 м в сторону, таким образом, нарушив все расчёты. Но это не помешало быстро перестроить мост и снова продолжить движения по нему.



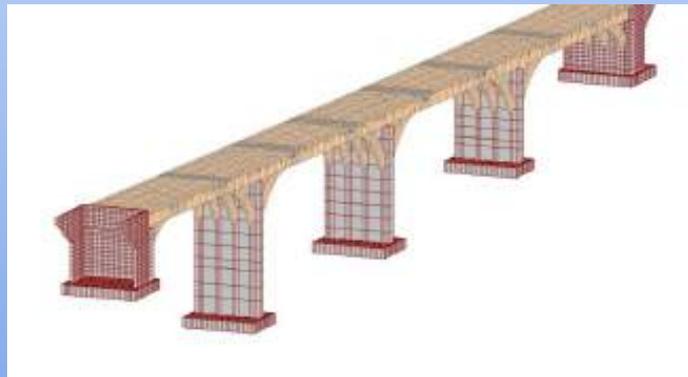
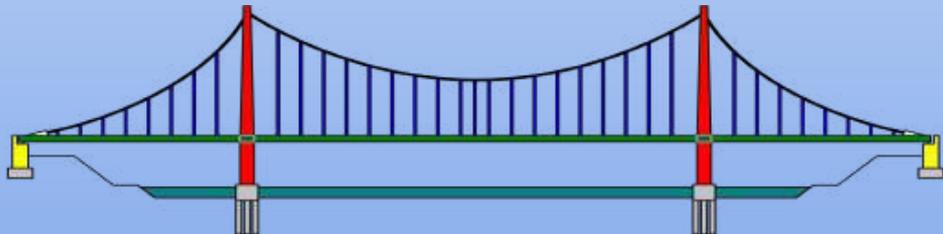
2. Чем отличаются висячие мосты от балочных ?

Рассмотрим самый распространенный вид мостов – **балочный мост** – это мост с пролетными строениями, основными несущими конструкциями которых служат балки (опоры).



2. Чем отличаются висячие мосты от балочных ?

В висячих мостах, в отличие от балочных, нагрузки (оказываемые на тросы) распределены равномерно и вместо большого количества опор нужны всего лишь две опоры (пилоны).



Висячие мосты: плюсы

а. Все силы, действующие на точки соединения тросов с кабелем (точки крепления, узловые точки), стабилизируются за счет тросов, поэтому достаточно всего двух опор (пилонов) висячего моста, которые можно сделать значительно тоньше, чем опоры в балочных мостах, из-за чего их выгоднее с экономической точки зрения использовать в строительстве.

б. Висячие мосты можно строить в труднодоступных местах, например в горах на большой высоте, или при больших расстояниях между берегами водоемов.

с. Висячие мосты могут без ущерба для целостности конструкции изгибаться под действием сильного ветра или сейсмических нагрузок, тогда как балочные мосты нужно строить более крепкими и тяжелыми.

Висячие мосты: минусы

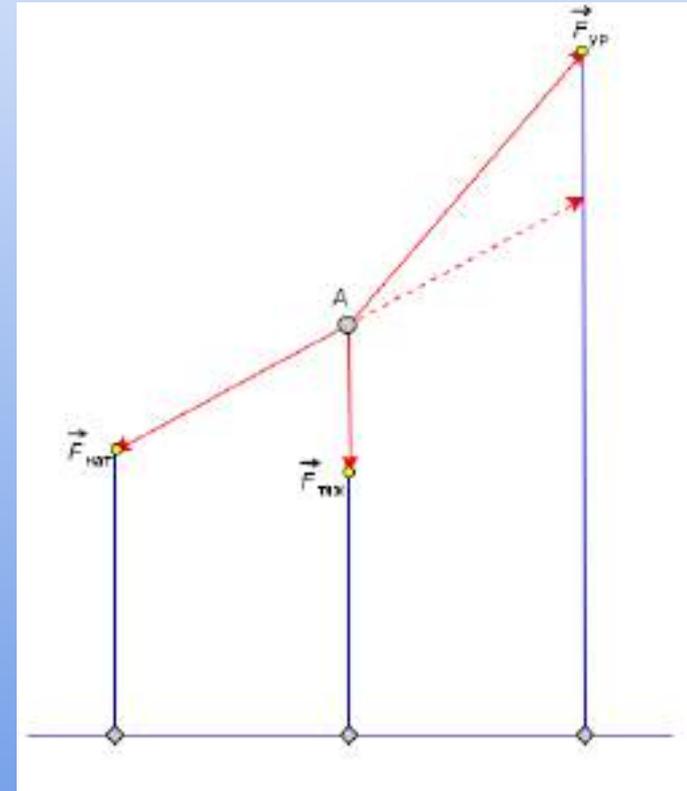
- а.** Висячие мосты редко используют в качестве железнодорожных, так как при воздействии на мост сильного ветра или сейсмических нагрузок, он может изгибаться.
- б.** При плохих (штормовых) погодных условиях, из-за недостаточной жесткости моста, может потребоваться перекрытие движения.
- с.** Висячие мосты можно строить только тогда, когда полотно моста не предполагает изгибов.

3. Какое условие обеспечивает устойчивость в висячем мосте?

Напряжения в висячем мосте – это напряжения растяжения в тросах и сжатия в опорах, напряжения в самом полотне моста малы.

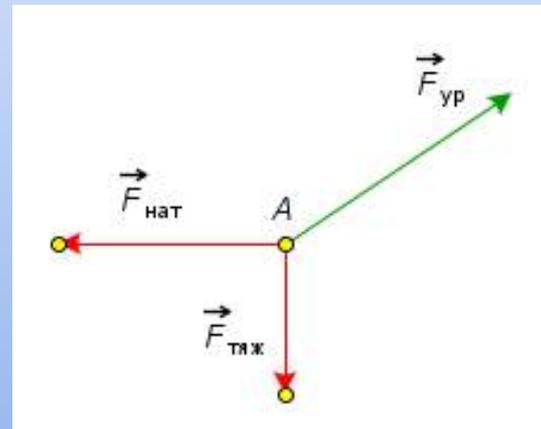
Рассмотрим точку А – точку крепления кабеля с тросом.

На точку А действуют три силы – $F_{\text{тяж}}$ (сила тяжести) и две силы натяжения – $F_{\text{нат}}$ (нижняя) и $F_{\text{ур}}$ (верхняя). Сумма сил, действующих на точку А, должна равняться нулю, иначе в этой точке произойдет разрыв троса или кабеля.



Условие устойчивости висячего моста

$$F_{тяж} + F_{нат} + F_{ур} = 0 \quad (1)$$



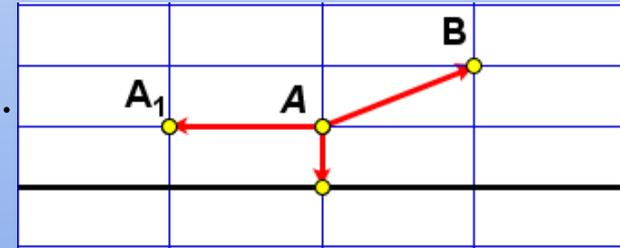
Силы тяжести, действующие на все точки крепления кабеля и троса равны, так как они удерживают одинаковые части полотна моста.

4. Как построить графическую модель висячего моста?

Графическую модель висячего моста будем строить с помощью компьютерной программы «1С. Математический конструктор».

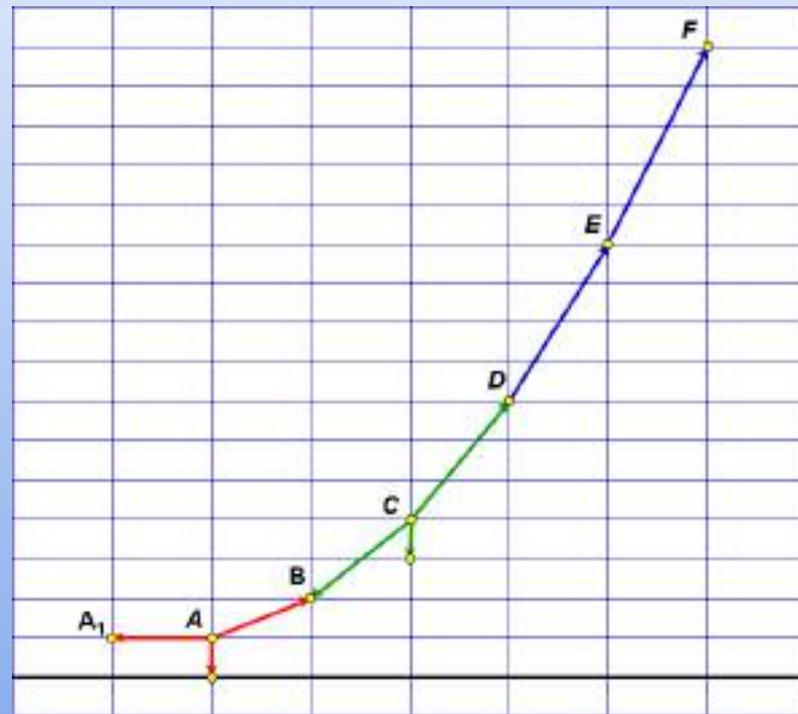
Построим сетку из прямоугольников. Пусть длина каждого прямоугольника равна силе натяжения ($F_{\text{нат}}$), а ширина равна силе тяжести ($F_{\text{тяж}}$). При построении модели моста будем использовать условие устойчивости (уравнение 1).

Сила натяжения $F_{\text{нат}}$ в точке А будет направлена перпендикулярно силе тяжести $F_{\text{тяж}}$, а сила натяжения $F_{\text{ур}}$ будет равна сумме векторов $F_{\text{тяж}}$ и $F_{\text{нат}}$, взятой с противоположным знаком, что следует из уравнения 1.



Далее будем строить правую часть висячего моста по этому же правилу.

Заметим, что каждый следующий «подъем» на единицу больше предыдущего. Таким образом, приращения ординат точек А, В, С, D, E, F образуют арифметическую прогрессию 1, 2, 3, 4, 5, ... с разностью, равной силе тяжести (принятой нами за единицу масштаба). Ордината $n+1$ точки равна сумме предыдущих n членов арифметической прогрессии, увеличенной на 1.



$$a_1 = y_2 - y_1$$

$$a_2 = y_3 - y_2$$

...

$$a_n = y_{n+1} - y_n$$

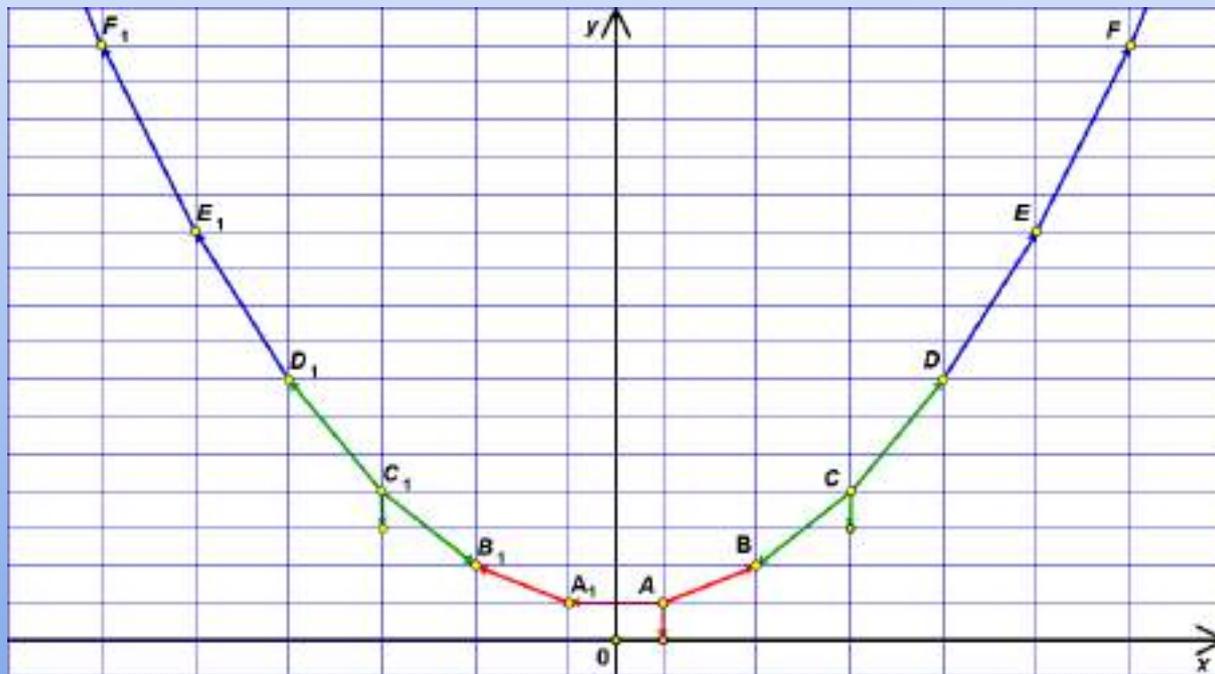
$$S_n = -y_1 + y_{n+1}$$

$$y_{n+1} = S_n + y_1$$

$$y_{n+1} = S_n + 1$$

4. Как построить графическую модель висячего моста?

Теперь построим графическую модель левой части висячего моста, отразив правую часть симметрично относительно серединного перпендикуляра к вектору \mathbf{AA}_1 .



5. Какая функция является математической моделью висячего моста?

Изобразив линию кабеля висячего моста, мы заметили, что она похожа на параболу. Докажем это.

Ранее было показано, что **все приращения ординат точек являются членами арифметической прогрессии**, назовем ее (a_n) .

При этом:

a_1 – первый член прогрессии, $a_1 = F_{\text{нат}}$

d – разность прогрессии, $d = F_{\text{тяж}}$

n – номер узловой точки

Изобразим полученную арифметическую прогрессию (a_n) геометрически, обозначая каждый элемент прогрессии прямоугольником (для наглядности).

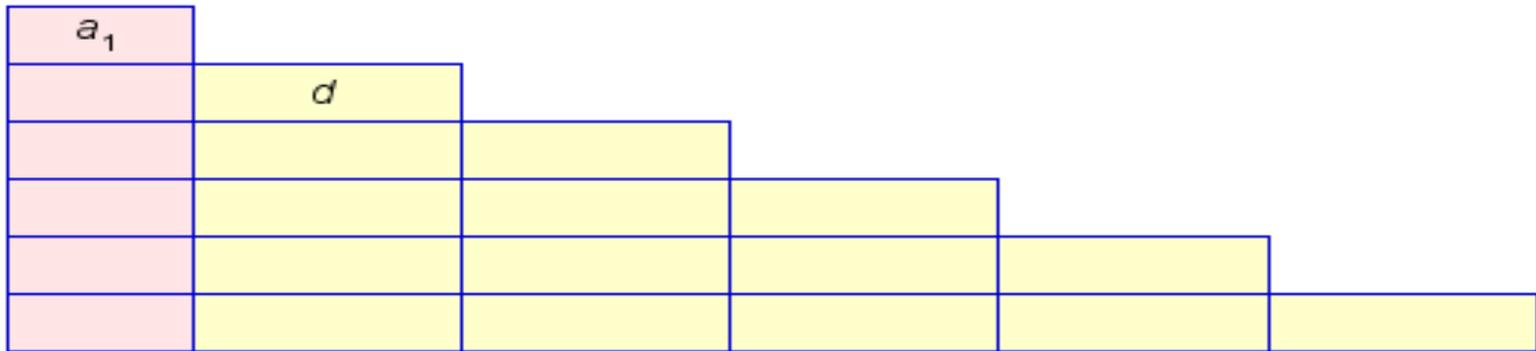
5. Какая функция является математической моделью висячего моста?

Покажем геометрическую интерпретацию нахождения суммы S_n арифметической прогрессии (a_n), учитывая условие, что **ордината каждой узловой точки является суммой S_n этой арифметической прогрессии.**

$$a_1 = F_{\text{нат}},$$

$$d = F_{\text{тяж}},$$

$$a_n = a_1 + d(n - 1)$$



5. Какая функция является математической моделью висячего моста?

Для вывода формулы S_n удвоим получившуюся фигуру и получим прямоугольник, площадь которого записана в формуле (2):

a_1						
	d					

$$2S_n = 2(a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n) = 2na_1 + (n - 1)nd \quad (2)$$

где

$2na_1$ – суммарная площадь красных прямоугольников,
 $(n - 1)nd$ – суммарная площадь желтых прямоугольников.

5. Какая функция является математической моделью висячего моста?

Итак:
$$2(a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n) = 2na_1 + (n - 1)nd$$

Разделим левую и правую части этого равенства на 2 и получим:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = na_1 + (n - 1)nd / 2 \quad (3)$$

Преобразуем правую часть равенства (3):

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = (2a_1 + d(n - 1))n / 2 \quad (4)$$

Или:

$$S_n = (2a_1 + d(n - 1))n / 2 \quad (5)$$

Таким образом, получили формулу суммы арифметической прогрессии.

5. Какая функция является математической моделью висячего моста?

Заменяем в равенстве (4) $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = S_n$, тогда имеем:

$$S_n = (2a_1 + d(n - 1))n / 2$$

Раскроем скобки, преобразуем правую часть равенства и получим:

$$S_n = n^2 * d / 2 + n * (2a_1 - d) / 2 \quad (6)$$

Или в общем виде:

$$S_n = n^2 * F_{тяж} / 2 + n * (2 * F_{нат} - F_{тяж}) / 2 \quad (7)$$

5. Какая функция является математической моделью висячего моста?

Таким образом, мы получили **квадратичную функцию $S_n = S(n)$** , которая показывает квадратичную зависимость ординаты узловой точки от ее номера.

Значит, математической моделью висячего моста является квадратичная функция, а кривая линия кабеля висячего моста – **парабола**.

Заключение

В нашем исследовании показано, что математической моделью висячих мостов является квадратичная функция, а линия кабеля висячего моста совпадает с параболой.

В ходе проведенного исследования нами были использованы некоторые интернет-ресурсы, которые отражают информацию о висячих мостах в России и за рубежом, а также изучены возможности моделирования в компьютерной программной среде «1С Математический конструктор».

Литература и интернет-источники

1. https://ru.wikipedia.org/wiki/Висячий_мост
2. <https://infopedia.su/8xdd56.html>
3. <https://www.booksite.ru/fulltext/1/001/008/093/018.htm>
4. https://www.liveinternet.ru/users/sveta_1950/post393983171
5. Компьютерная программа: «1С Математический конструктор» <https://obr.1c.ru/mathkit/>
6. Висячие мосты, арифметическая прогрессия и парабола. <https://www.youtube.com/watch?v=Rub4gOsndKk>

Международная научная конференция школьников
«XXI Колмогоровские чтения»

Спасибо за внимание!