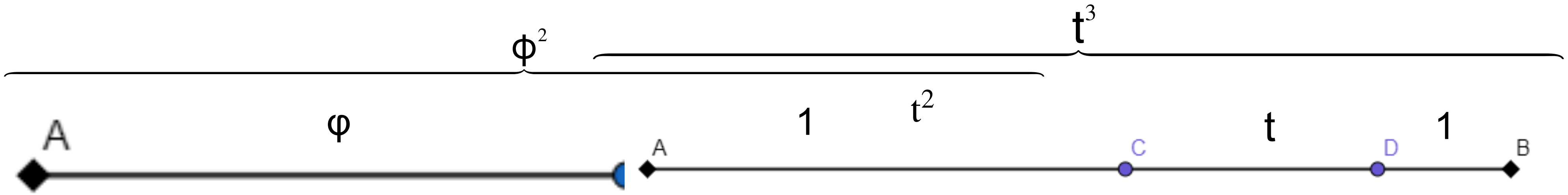
ИГРА «DIFFY BOXES», КУРНОСЫЙ КУБ И КОНСТАНТА ТРИБОНАЧЧИ

Автор: Андрей Мордосевич, СУНЦ МГУ, 11 класс
Научный руководитель: Владимир Натанович Дубровский

ЗОЛОТОЕ СЕЧЕНИЕ, «ТРОЙНОЕ СЕЧЕНИЕ»



$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB}$$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CD} = \frac{CD}{DB}$$

$$\phi^2 = \phi + 1$$

$$t^3 = t^2 + t + 1$$

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$t = \frac{1}{3}\left(1 + \sqrt[3]{19 + 3\sqrt{33}} + \sqrt[3]{19 - 3\sqrt{33}}\right)$$

ЧИСЛА ФИБОНАЧЧИ, ЧИСЛА ТРИБОНАЧЧИ

0 1 1 2 3 5 8 13 21 34 55 89 ...

0 1 1 2 4 7 13 24 44 81 149 274 ...

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \qquad b_n = b_{n-1} + b_{n-2} + b_{n-3}$$

$$a_n \approx \lambda^n \qquad \sigma^3 = \sigma^2 + \sigma + 1$$

$$\lambda^n = \lambda^{n-1} + \lambda^{n-2} \qquad \sigma = t$$

$$\lambda^2 = \lambda^1 + 1$$

$$\lambda = \varphi$$

Фибоначчи ⇢ трибоначчи

ИГРА «DIFFY BOXES»

$q=(a,\ b,\ c,\ d)\in\mathbb{R}^4$ – квартет

$D:(a,\ b,\ c,\ d)\longmapsto(|b-a|,\ |c-b|,\ |d-c|,\ |a-d|)$

Задача: изучить орбиты отображения D (т.е. $q, D(q), D^2(q), \ldots$).

Квартеты q и q' будем считать эквивалентными, если q переводится в q':

- самосовмещением квадрата – поворотом: $(a,\ b,\ c,\ d)\sim(b,\ c,\ d,\ a)$, отражением: $(a,b,c,d)\sim(d,c,b,a)$
- взятием линейной функции $f(x)=kx+b,\ k\neq 0$, от каждого числа квартета: $(a,\ b,\ c,\ d)\sim\left(f(a),\ f(b),\ f(c),\ f(d)\right)$.

Обозначим класс квартета $(a,\ b,\ c,\ d)$ через $\left[a,\ b,\ c,\ d\right]$. Отображение D переводит классы в классы.

Орбита квартета и его класса «устроены одинаково».

Теорема:

ИГРА «DIFFY BOXES»

Пример 1. Класс $\mathfrak{A} = [a,\ a,\ a,\ a]$: $\forall a, [a,\ a,\ a,\ a] = [0{,}0, 0{,}0]$ и $D(a, a, a, a) = (0{,}0, 0{,}0)$.

Пример 2. Класс $\mathfrak{B} = \left[a,\ a,\ b,\ b\right]$, где $a\ \neq\ b$: сходится к $(0,\ 0,\ 0,\ 0)$ за три итерации:

$(a,\ a,\ b,\ b) \to (0,\ |b-a|,\ 0,\ |b-a|) \to (|b-a|,\ |b-a|,\ |b-a|,\ |b-a|) \to (0,\ 0,\ 0,\ 0)$.

Лемма 1. В любом классе $\mathfrak{C}\ \neq\ \mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ существует единственный квартет $q\left(x, y\right) = (0{,}1, x, y)$, такой что $x \geq 0,\ y \geq 1,\ |y-x| \leq 1$. Множество таких пар (x, y) – P_{01}.

Доказательство существования. Пусть $(a,\ b,\ c,\ d) \in\ \mathfrak{C}$. Перестановкой, сменой знака, переобозначением добьемся, что

ИГРА «DIFFY BOXES»

Лемма 2. Квартет из $S_1 = \{[0,\ 1,\ x,\ y], x < 1, (x, y) \in P_{01}\}$ сходится к [0, 0, 0, 0] не более чем за четыре итерации:

$[0,\ 1,\ x,\ y] \to [1,\ 1 - x,\ y - x,\ y] \to [x,\ y - 1,\ x,\ y - 1] \to [\,|x - y + 1|, |x - y + 1|, |x - y + 1|, |x - y + 1|\,] \in \mathfrak{A}$

.

Лемма 3. Квартет из $S_3 = \{[0,\ 1,\ x,\ y], y < x, (x, y) \in P_{01}\}$ сходится к [0, 0, 0, 0] не более чем за шесть итераций:

Поиск неподвижной точки. Пусть теперь $y > x,\ x > 1,\ (x, y) \in P_{01}$.

Тогда $[0,\ 1,\ x,\ y] \to [1,\ x - 1,\ y - x,\ y]$.

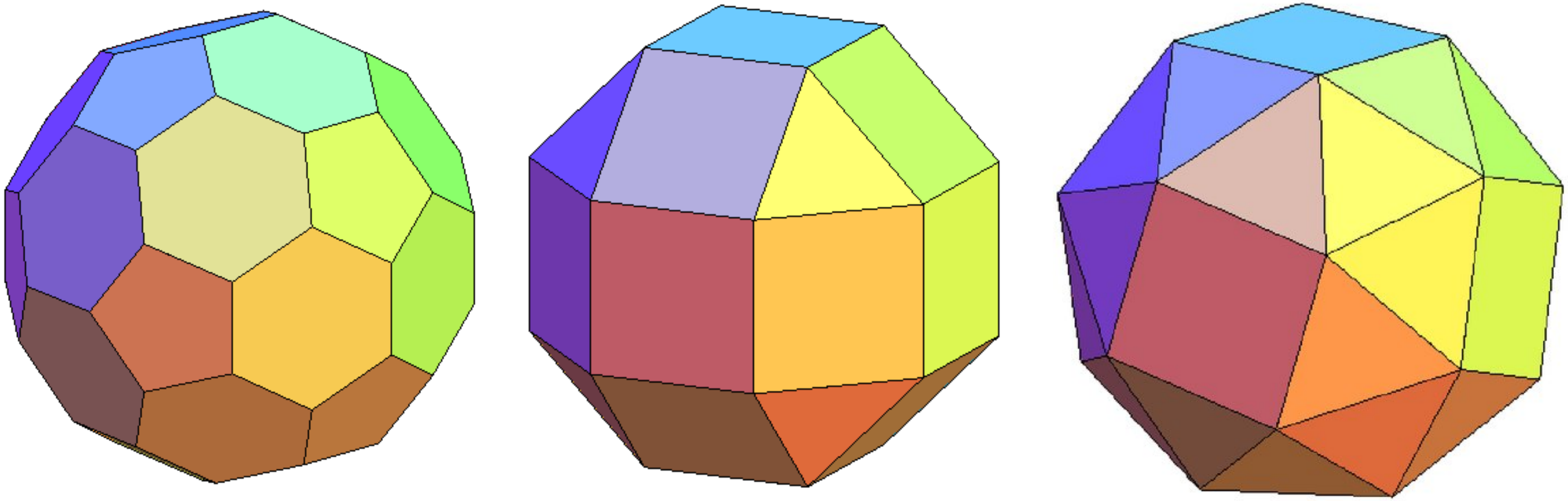
1. Разность между $y - x$ и y минимальна, так что $[y,\ 1,\ x - 1,\ y - x]$
2. $[-y,\ -1,\ 1 - x,\ x - y]$
3. $[0,\ y - 1,\ y + 1 - x,\ x]$

x $y + 1 - x$

КУРНОСЫЙ КУБ

Определение: полуправильный многогранник – это такой многогранник, у которого все грани – правильные многоугольники, а все вершины устроены «одинаково», то есть совмещаются движениями. Какие существуют полуправильные многогранники?

1. Призмы и антипризмы
2. Ещё 13 в



Определение: курносый (или плосконосый) куб – полуправильный многогранник, в каждой вершине которого сходится 4 треугольника и один квадрат.

ЛИТЕРАТУРА

Antonio Behn, Christopher Kribs-Zaleta,Vadim Ponomarenko, «The Convergence of Difference Boxes»
American Mathematical Monthly, 112, May 2005, 426-439