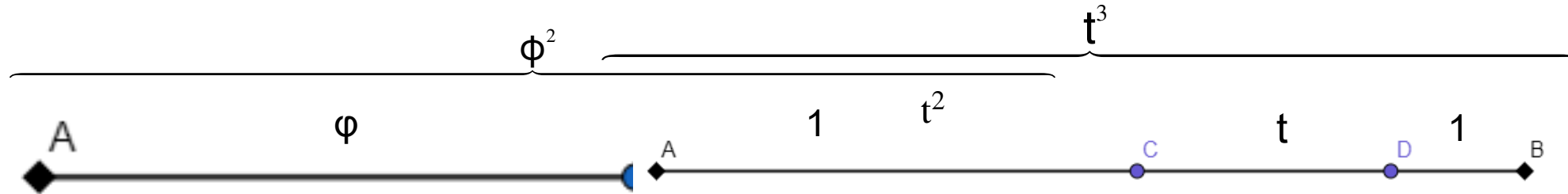


ИГРА «DIFFY BOXES», КУРНОСЫЙ КУБ И КОНСТАНТА ТРИБОНАЧЧИ



Автор: Андрей Мордосевич, СУНЦ МГУ, 11 класс
Научный руководитель: Владимир Натанович Дубровский

ЗОЛОТОЕ СЕЧЕНИЕ, «ТРОЙНОЕ СЕЧЕНИЕ»



$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB}$$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CD} = \frac{CD}{DB}$$

$$\phi^2 = \phi + 1$$

$$t^3 = t^2 + t + 1$$

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$t = \frac{1}{3} \left(1 + \sqrt[3]{19 + 3\sqrt{33}} + \sqrt[3]{19 - 3\sqrt{33}} \right)$$

ЧИСЛА ФИБОНАЧЧИ, ЧИСЛА ТРИБОНАЧЧИ

0 1 1 2 3 5 8 13 21 34 55 89 144 233 377 610 987 1597 2584 4181 6765 10946 17711 28657 46368 75025 121393 196418 317811 514229 832040 1346269 2178309 3524578 5702887 9227465 14930352 24157817 39088169 63245986 102386513 165622481 268015440 433637926 701652465 1134903174 1836555639 2971458809 4808013448 7779468182 12587104601 20365583640 32952688341 53317114049 86269751990 139583869840 225851434781 365435296771 591286729811 956722026592 1558014756403 2514737776214 4072751482615 6617479238829 10730924435744 17348696718363 28179142406183 45527716842946 73700579993129 119227091486074 192927345508053 312154437001177 505145678968251 817313469470225 1322459046438476 2139772963408701 3462081611488976 5601844575907677 9063926246316653 14665771822225330 23729697518542007 38395623764858657 62125300682835664 100520918446994321 162646219130140985 263167137613035306 425813356743176291 688980575873316597 1114149251481492888 1803032427254809485 2917181678736302382 4720214106018112867 7637395784754425251 12357607541772538136 20000002329600000000 ...

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad b_n = b_{n-1} + b_{n-2} + b_{n-3}$$

$$a_n \approx \lambda^n$$

$$\sigma^3 = \sigma^2 + \sigma + 1$$

$$\lambda^n = \lambda^{n-1} + \lambda^{n-2} \quad \sigma = t$$

$$\lambda^2 = \lambda^1 + 1$$

$$\lambda = \varphi$$

Фибоначчи \rightsquigarrow трибоначчи

ИГРА «DIFFY BOXES»

$q = (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ – квартет

$$D: (a, b, c, d) \mapsto (|b - a|, |c - b|, |d - c|, |a - d|)$$

Задача: изучить орбиты отображения D (т.е.

квартеты $q, D(q), D^2(q), \dots$ будем считать эквивалентными, если q переводится в q' :

- самосовмещением квадрата – поворотом:

$$(a, b, c, d) \sim (b, c, d, a), \text{ отражением:}$$

$$(a, b, c, d) \sim (d, c, b, a)$$

- взятием линейной функции $f(x) = kx + b, k \neq 0$, от каждого числа квартета:

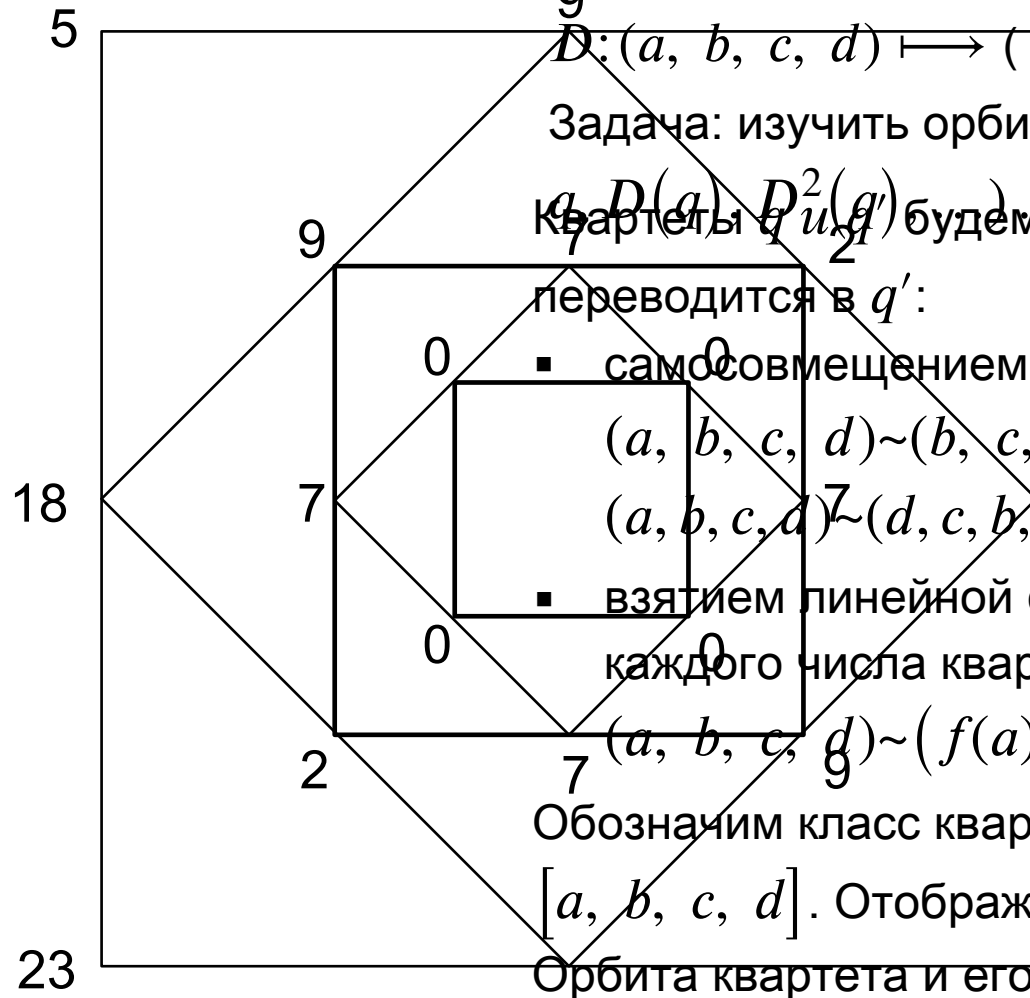
$$(a, b, c, d) \sim (f(a), f(b), f(c), f(d)).$$

Обозначим класс квартета (a, b, c, d) через

$[a, b, c, d]$. Отображение D переводит классы в классы.

Орбита квартета и его класса «устроены одинаково».

Теорема:



ИГРА «DIFFY BOXES»

Пример 1. Класс $\mathfrak{A} = [a, a, a, a]$: $\forall a, [a, a, a, a] = [0, 0, 0, 0]$ и $D(a, a, a, a) = (0, 0, 0, 0)$.

Пример 2. Класс $\mathfrak{B} = [a, a, b, b]$, где $a \neq b$: сходится к $(0, 0, 0, 0)$ за три итерации:

$$(a, a, b, b) \rightarrow (0, |b - a|, 0, |b - a|) \rightarrow (|b - a|, |b - a|, |b - a|, |b - a|) \rightarrow (0, 0, 0, 0).$$

Лемма 1. В любом классе $\mathfrak{C} \neq \mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ существует единственный квартет $q(x, y) = (0, 1, x, y)$, такой что $x \geq 0, y \geq 1, |y - x| \leq 1$. Множество таких пар $(x, y) - P_{01}$.

Доказательство существования. Пусть $(a, b, c, d) \in \mathfrak{C}$. Перестановкой, сменой знака, переобозначением добьемся, что

ИГРА «DIFFY BOXES»

Лемма 2. Квартет из $\mathcal{S}_1 = \{ [0, 1, x, y], x < 1, (x, y) \in P_{01} \}$ сходится к $[0, 0, 0, 0]$ не более чем за четыре итерации:

$$[0, 1, x, y] \rightarrow [1, 1 - x, y - x, y] \rightarrow [x, y - 1, x, y - 1] \rightarrow [|x - y + 1|, |x - y + 1|, |x - y + 1|, |x - y + 1|] \in \mathfrak{A}$$

Лемма 3. Квартет из $\mathcal{S}_3 = \{ [0, 1, x, y], y < x, (x, y) \in P_{01} \}$ сходится к $[0, 0, 0, 0]$ не более чем за шесть итераций:



Поиск неподвижной точки. Пусть теперь $y > x, x > 1, (x, y) \in P_{01}$.

Тогда $[0, 1, x, y] \rightarrow [1, x - 1, y - x, y]$.

1. Разность между $y - x$ и y минимальна, так что $[y, 1, x - 1, y - x]$

2. $[-y, -1, 1 - x, x - y]$

3. $[0, y - 1, y + 1 - x, x]$

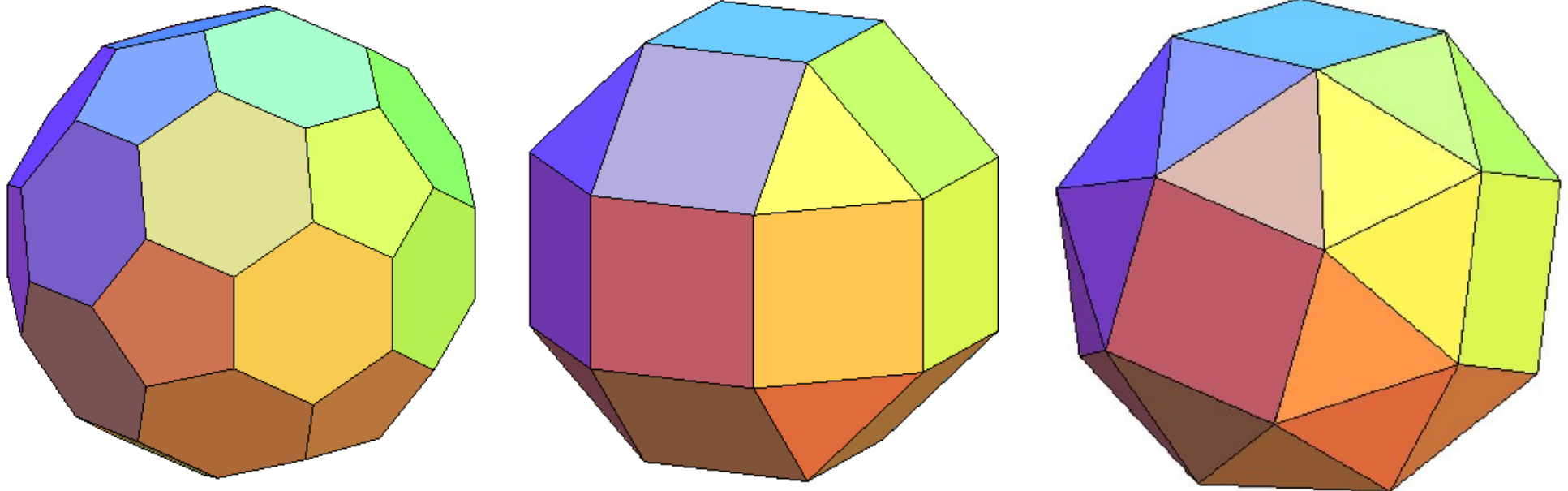
$x \qquad y + 1 - x$

КУРНОСЫЙ КУБ

Определение: полуправильный многогранник – это такой многогранник, у которого все грани – правильные многоугольники, а все вершины устроены «одинаково», то есть совмещаются движениями.

Какие существуют полуправильные многогранники?

1. Призмы и антипризмы
2. Ещё 13 в



Определение: курносый (или плосконосый) куб – полуправильный многогранник, в каждой вершине которого сходится 4 треугольника и один квадрат.



ЛИТЕРАТУРА

Antonio Behn, Christopher Kribs-Zaleta, Vadim Ponomarenko, «The Convergence of Difference Boxes»
American Mathematical Monthly, 112, May 2005, 426-439