

Тема:

«О круговых многочленах и теории делимости»

Автор: ученица 10F класса, Базилова Дарига

Научный руководитель: учитель математики Проскокова А.В.

Научный консультант: профессор,
доктор физико-математических наук ПГПУ Исмоилов Д.И.

Актуальность работы:

В моей работе описывается теория делимости круговых многочленов, так же формула для решения частных случаев при их делении на одночлены и её следствия.

В различных конкурсах и олимпиадах часто встречаются задания на делимость (в том числе делимость многочленов на одночлен и делимость многочленов на число) в связи с этим я могу полагать, что данная работа достаточно актуальна, учитывая количество людей, желающих участвовать в соревнованиях.

Зачастую задачи на кратность люди решают методом подбора, на основании различных теорем, но данные способы не всегда эффективны, так как существуют частные случаи, при которых использующиеся методы занимают большое количество времени и ресурсов.

Полученные результаты

Вывод 1: Общая формула для делимости многочленов:

$$x^{mk+(m-1)} + P_{m-1}(x) \div P_m(x)$$

Доказательство :

$$x^{mk+(m-1)} - x^{m-1} + x^{m-1} + P_{m-1}(x) = x^{m-1}(x^{mk} - 1) + P_m(x) = x^{m-1}(x - 1) * P_m(x) + P_m(x) = P_m(x) * [x^{m-1}(x - 1) + 1] = P_m(x) * (x^m - x^{m-1} + 1)$$

Применение в интегральных исчислениях: Для примера рассмотрим выражение при $k = 1$ и найдем неопределённый интеграл при делении $(x^7 + x^2 + x + 1)$ на $(x^3 + x^2 + x + 1)$.

$\int \frac{(x^7+x^2+x+1)}{(x^3+x^2+x+1)} dx$, в предыдущем пункте мы выяснили, что подынтегральная дробь равна $(x^4 - x^3 + 1)$, поэтому заменяем дробь получившимся многочленом. Получаем:

$$\int (x^4 - x^3 + 1) dx = \int x^4 dx - \int x^3 dx + \int 1 dx = \frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{4} + x + C$$

Полученные результаты

Теорема 4: $D_n(g) = g^n + (g - 2)(g - 1)n - 1 : (g - 1)^2$

Доказательство:
$$g^n - 1 = (g - 1) * P_n(g) = (g - 1) * (\sum_{r=0}^{n-1} g^r) = (g - 1) \sum_{r=0}^{n-1} (g^r + 1 - 1) = (g - 1) * (\sum_{r=0}^{n-1} (g^r - 1) + \sum_{r=0}^{n-1} g^0) = (g - 1) * [\sum_{r=0}^{n-1} (g^r - 1) + n] = (g - 1) * \sum_{r=0}^{n-1} (g - 1) * P_r(g) + n = (g - 1)^2 * \sum_{r=0}^{n-1} P_r(g) + (g - 1)n = (g - 1)^2 * (\sum_{r=0}^{n-1} P_r(g)) + (g - 2)(g - 1)n + (g - 1)n = (g - 1)^2 * A_n(g) + (g - 1)n[(g - 2) + 1] = (g - 1)^2 * A_n(g) + (g - 1)^2 n = (g - 1)^2 * (A_n(g) + n)$$

Вывод 2: $D_n(g) : (g - 1)^2$; $D_n(g) : (A_n(g) + n)$

Применение в интегральных исчислениях: $\int \frac{D_n(g)}{(g-1)^2} dx$, в данном случае

мы не можем сказать, явно ли вычисляется данный интеграл, но благодаря доказанной выше теореме, выражения такого вида могут быть

с лёгкостью вычислены $\int \frac{D_n(g)}{(g-1)^2} dx = \int (A_n(g) + n) dx \dots$

Заключения и выводы исследования:

Исходя из всего вышесказанного, я получила совершенно новую формулу для делимости многочленов, основываясь на теории делимости кругового многочлена, а так же формулу делимости многочлена на число для частных случаев:

$$1. x^{mk+(m-1)} + P_{m-1}(x) \div P_m(x)$$

$$2. D_n(g) \div (g-1)^2; D_n(g) \div (A_n(g) + n)$$

Выведенные мною выражения могут быть широко использованы, например, при интегральных исчислениях и вычислениях производных.

Смотря на проделанную работу, я считаю, что смогла выполнить поставленные перед собой цели. Перспективы дальнейшего развития проекта я вижу в углубленном и более детальном изучении своей темы, её расширении и развитии. Для себя, я подчеркнула множество новой информации, которая может помочь мне в обучении и открыть для меня большие перспективы саморазвития

Список литературы:

- «Ошибки в математических рассуждениях». Бродис В.М., Минковский В.Л., Харчева А.К.. Москва: Государственное учебно-педагогическое издательство министерства просвещения РСФСР, 1959. - 178 с.
- <http://kvant.mccme.ru/pdf/1998/01/kv0198senderov.pdf>
- «Многочлены деления круга» В. Сендеров, А. Спивак