Автобиографические числа

Фазуллин Алсын г. Уфа, МБОУ «Гимназия №3»

Руководитель работы:

к.ф.-м.н., доц. Абузярова Н.Ф.

Введение

ОПРЕДЕЛЕНИЕ.

Натуральное число называем ***автобиографическим,*** если каждая цифра в его записи, кроме последней (разряда единиц) показывает, сколько раз в записи этого числа встречается идущая следом цифра.

ПРИМЕРЫ.

Все однозначные числа: 1, 2, …, 9 – автобиографические;

приведем **все** двузначные автобиографические числа:

22, 10, 12, 13, 14, 15, 16,17,18, 19.

Актуальность темы. Теория чисел

- *Теория чисел* — раздел математики, первоначально изучавший свойства целых чисел. В современной теории чисел рассматриваются и другие типы чисел — например, алгебраические и трансцендентные, а также функции различного происхождения, которые связаны с арифметикой целых чисел и их обобщений.
- Вместе с тем, в теории чисел существует большое количество открытых проблем.

НАЧАЛО ИССЛЕДОВАНИЯ

- ОЛИМПИАДНАЯ ЗАДАЧА.

Выяснить, существует ли автобиографическое число, большее миллиарда?

- По аналогии с числом 22 обнаруживаем числа

  333, 4444, 55555, 666666, 7777777, 88888888, 999999999.

  Даже самое большое из них – 999999999 – меньше миллиарда.

Решение олимпиадной задачи

- **ЭВРИСТИЧЕСКИЙ МЕТОД**

позволяет найти число 121,

вместе с ним четырехзначные числа: 1210, 1213, 1214, 1215, 1216, 1217, 1218, 1219.

Далее находим также числа 23232, 3434343, 454545454,

56565656565, 6767676767676, 787878787878787,

89898989898989898

(БОЛЬШИЕ МИЛЛИАРДА!).

Ответ на вопрос Олимпиадной задачи с предыдущего слайда – ДА.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

ЦЕЛЬ РАБОТЫ:

найти ВСЕ автобиографические числа и доказать, что других не существует.

ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ:

Мы доказали, что *не существует других автобиографических чисел, кроме перечисленных выше,* то есть, кроме чисел

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19,

22, 333, 4444, 55555, 666666, 7777777, 88888888, 999999999,

121, 1210, 1213, 1214, 1215, 1216,1217, 1218, 1219,

23232, 3434343, 454545454, 56565656565,

6767676767676, 787878787878787, 89898989898989898

СХЕМА ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ОСНОВНОГО РЕЗУЛЬТАТА

- Все трехзначные возможные автобиографические числа: 333, 121.
- Пусть n- автобиографическое и состоит из более, чем трех цифр.

Шаг 1: докажем, что n не может состоять из попарно различных цифр. Иначе, каждой цифре, кроме первой, предшествует 1. Даже в случае 4-хзначного числа это приводит к тому, что в записи n больше одного раза встречается цифра «1» - противоречие.

Доказательство. Шаг 2

- Итак, запись автобиографического числа n начинается с группы (возможно, одноэлементной) попарно различных цифр n=*abcd*...
- Если в этой группе только одна цифра, то есть n=*aa*…, то и дальше могут быть только цифры *a*, иначе получим противоречие с определением автобиографического числа. То есть n=*aaa*…
- Числа такого виды были выше указаны, их девять: 1, 22, 333, 4444, 55555, 666666, 7777777, 88888888, 999999999

Доказательство. Шаг 3

- Если в начальной группе попарно различных цифр – две: n=*ab*…, то дальше возможен только повтор n=*aba*… (то есть n=*abb*… не может быть по определению автобиографического числа). Далее, после “*aba*” не может стоять цифра *c*, отличная и от *a*, и от *b* (<u>обоснование см. на след. слайде</u>). Значит, будет запись n=*abab*… И так далее, приходим к числам 23232, 3434343, 454545454, 56565656565, 6767676767676,787878787878787, 89898989898989898, уже найденным выше.

Обоснование невозможности n=*abac*…

- Если допустить такую возможность, то получим, что цифр «*a*» - не меньше, чем *2a* штук.
- Все цифры «*a*», кроме первой, встречаются в паре с «*b*». Значит, групп «*ba*» в записи числа n будет не меньше, чем *(2a-1)* штука. А самих цифр «*b*» - ровно *a* штук. Из последних двух предложений получаем $a \geq 2a-1$. Так как *a* - натуральное число, получаем $a=1$. То есть n=*1b1c*… Цифра *b* может быть только 2, и тогда n=1210, 1213, …, 1219 (эти числа были указаны в списке выше.)

Доказательство. Шаг 4

- Пусть теперь n=*abc*… Как и выше, возможности n=*abcc*… и n=*abcb*… противоречат определению автобиографического числа.
- Рассмотрим случай n=*abca*… Цифр “*b*” – *a* штук, и все – в паре с “*a*”, поэтому цифр “*a*” не меньше, чем *a* штук, то есть *c*≥*a* (на самом деле, тогда *c*>*a*, ведь с и а различны). Цифр “*c*” – *b* штук, а групп “*ca*” – ровно (*c*-*1*) штука. Значит, ***b*≥*c*-*1***, а из того, что ***c*>*a*** следует, что ***c*-*1*≥*a***. Следовательно, ***b*≥*a***, и так как **они различны**, то ***b*>*a***. С другой стороны, *b* – это количество цифр “*c*” в записи числа n. Любая цифра “*c*” присутствует только в паре с “*b*”, то есть группой “*bc*”, значит, не более, чем *a* раз. Значит, ***b*≤*a*** (точнее, ***b*<*a***). Получили противоречие.

Доказательство. Шаг 5

- Невозможность случаев n=*abcd*…, n=*abcde*… и т.д. обосновывается **аналогично** шагу 4.

Задача проекта решена.

Заключение

- *Подведем итоги выполненного исследования.*

Нам удалось доказать, что *не существует других автобиографических чисел, кроме перечисленных выше*, то есть, кроме чисел
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19,
22, 333, 4444, 55555, 666666, 7777777, 88888888, 999999999,
121, 1210, 1213, 1214, 1215, 1216,1217, 1218, 1219,
23232, 3434343, 454545454, 56565656565,
6767676767676, 787878787878787, 89898989898989898.

Спасибо за внимание!