3 тур интернет-олимпиады СУНЦ МГУ, решения

Математика

8 класс

1. Положительные числа u и v таковы, что $u^2 + 3uv = 19$ и $3v^2 + uv = 37$. Чему может быть равно $u + 3v$?

Ответ. $\sqrt{130}$.

Решение. Заметим, что $(u+3v)^2 = u^2 + 3uv + 3uv + 3 \cdot 3v^2 = 19 + 3 \cdot 37 = 130$. Так как u и v положительны, то $0 < u + 3v = \sqrt{130}$.

2. Докажите, что для произвольных положительных x, y, z выполняется неравенство $\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{z} \geqslant \dfrac{4x}{x+z}$.

Решение. После приведения к общему знаменателю получаем эквивалентное неравенство

$$x^2z + xz^2 + xy^2 + y^2z \geqslant 4xyz,$$

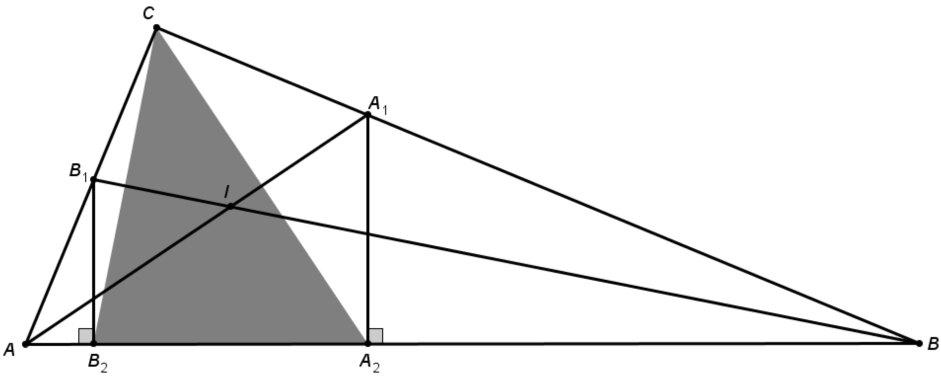
которое в свою очередь эквивалентно

$$x(z-y)^2 + z(x-y)^2 \geqslant 0,$$

что верно.

3. Дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C, AA_1 и BB_1 — его биссектрисы. Точки A_2 и B_2 — основания перпендикуляров, опущенных из A_1 и B_1 на AB. Докажите, что центр вписанной окружности треугольника ABC совпадает с центром описанной окружности треугольника A_2B_2C.

Решение.

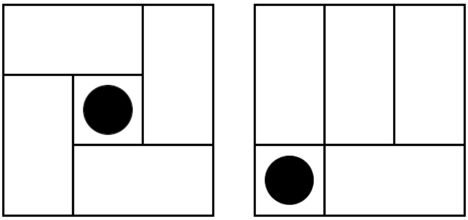


Заметим, что $\triangle BB_1C = \triangle BB_1B_2$ по гипотенузе и острому углу, следовательно BB_1 — серединный перпендикуляр к отрезку B_2C. Аналогично $\triangle AA_1C = \triangle AA_1A_2$, следовательно AA_1 — серединный перпендикуляр к отрезку A_2C. Итак, биссектрисы двух углов треугольника ABC совпадают с серединными перпендикулярами к двум сторонам треугольника A_2B_2C, а значит и их точки пересечения совпадают, что и требовалось.

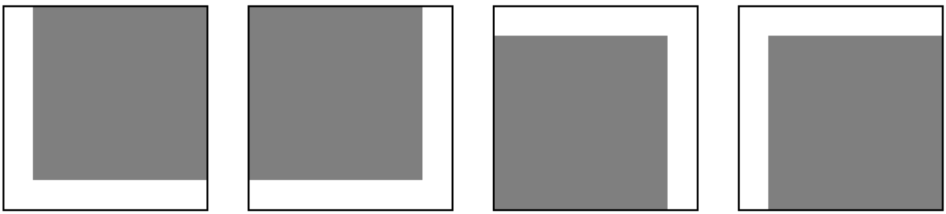
4. Дана доска размером 2021×2021, ее клетки раскрашены в черный и белый цвета в шахматном порядке так, что угловые клетки черные. Борис и Глеб играют в следующую игру. Борис ставит фишку в произвольную черную клетку. Глеб пытается накрыть оставшиеся клетки доски доминошками. Каждая доминошка накрывает две соседние по стороне клетки, доминошки нельзя накладывать одну на другую. Если Глебу удается накрыть все клетки (кроме занятой фишкой Бориса), то он побеждает. Иначе побеждает Борис. Кто из мальчиков может обеспечить себе победу?

Ответ. Побеждает Глеб.

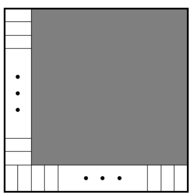
Решение. Докажем, что Глеб побеждает на любой доске размера $2k+1 \times 2k+1$. Проведем индукцию по k. База для доски 3×3 ($k = 1$). Борис ставит фишку либо в центральную клетку, либо в угловую. Разбиение для обоих случаев на картинке.



Переход. Пусть доску $2k - 1 \times 2k - 1$ Глеб умеет разбивать на доминошки при любом ходе Бориса. Рассмотрим доску $2k + 1 \times 2k + 1$. Выделим на ней квадраты $2k - 1 \times 2k - 1$ четырьмя способами как на рисунке.



Заметим, что объединение четырех выделенных квадратов покрывает весь квадрат $2k+1 \times 2k+1$. Следовательно, фишка в любом случае попадет хотя бы в один из заштрихованных квадратов. Разобьем этот квадрат на доминошки (мы можем это сделать по предположению индукции). Разобьем оставшуюся (белую) область на доминошки как показано на рисунке.



Разбиение для трех других случаев получается из приведенной картинки поворотом. Доказательство завершено.

5. Соня знает, что у множества $X = \{1, 2, 3, \ldots, 2021\}$ есть 2^{2021} подмножеств (включая пустое подмножество и само X). Она хочет выбрать из них некоторые N подмножеств и назвать их *прикольными*. При этом объединение любых двух прикольных подмножеств должно быть тоже прикольным, а объединение любых двух подмножеств, не являющихся прикольными, тоже не должно быть прикольным. Верно ли, что при любом N, не превосходящем 2^{2021}, Соне удастся это сделать?

Ответ. Верно.

Решение. Пусть $X_n = \{1, 2, \ldots, n\}$. Докажем, что при любом N, $0 \leqslant N \leqslant 2^n$, Соня может выбрать N прикольных подмножеств X_n так, что объединение любых двух прикольных подмножеств будет прикольным, а объединение любых двух неприкольных подмножеств будет неприкольным. Доказательство проведем по индукции по n.

База для $n = 1$ очевидна. Обоснуем переход. Пусть при любом N, $0 \leqslant N \leqslant 2^n$, Соня умеет выбирать в X_n прикольные подмножества $A_1, A_2, \ldots, A_N$. Рассмотрим теперь множество X_{n+1} и произвольное N, $0 \leqslant N \leqslant 2^{n+1}$. Разберем два случая: $0 \leqslant N \leqslant 2^n$ и $2^n \leqslant N \leqslant 2^n$. (То, что $N = 2^n$ подходит в оба случая, никак нам не помешает).

Первый случай. Соня может объявить прикольными те же множества $A_1, A_2, \ldots, A_N$, которые подходили для X_n. Тогда объединение двух прикольных множеств снова будет прикольным по предположению индукции. Неприкольные множества будут двух типов: те, что были неприкольными в X_n и все множества, содержащие элемент $n + 1$. Объединение двух множеств первого типа неприкольно по предположению индукции. Объединение двух множеств, хотя бы одно из которых второго типа, содержит $n+1$, а значит неприкольно.

Второй случай. Соня умеет решать задачу для $N' = 2^{n+1} - N$, так как $0 \leqslant N' \leqslant 2^n$. Пусть она выберет прикольные множества $A_1, A_2, \ldots, A_{N'}$. Теперь переходим от N' к N: назовем множества $A_1, A_2, \ldots, A_{N'}$ неприкольными, а все остальные — прикольными. Легко видеть, что все условия выполнены.