3 тур интернет-олимпиады СУНЦ МГУ, решения

Математика

7 класс

1. Положительные числа u и v таковы, что $u^2 + 3uv = 49$ и $4v^2 + uv = 15$. Чему может быть равно $u + 2v$?

Ответ. 8.

Решение. Заметим, что $(u + 2v)^2 = u^2 + 3uv + uv + 4v^2 = 49 + 15 = 64$. Так как u и v положительны, то $0 < u + 2v = 8$.

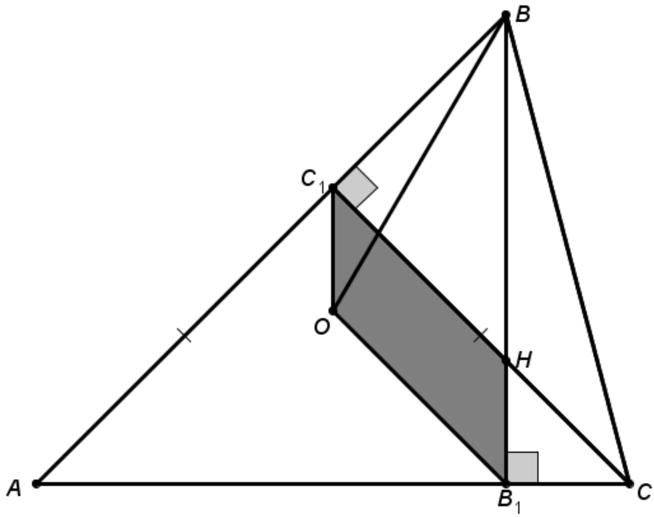
2. В одном дворе живут пять овчарок и одна дворняжка. Назовем *сворой* любую группу из двух или более собак. Каких свор во дворе больше — с дворняжкой или без дворняжки — и на сколько?

Ответ. Свор с дворняжкой больше на пять.

Решение. Назовем две своры *похожими*, если в них одни и те же овчарки, но в одной своре есть дворняжка, а в другой нет. Заметим, что “почти все” своры разбились на пары похожих. Для любой своры без дворняжки есть единственная похожая на нее с дворняжкой. Обратное верно с оговоркой: для любой своры *из трех и более собак* с дворняжкой есть единственная похожая на нее без дворняжки. А для свор из двух собак, одна из которых дворняжка, похожих нет. Таких “непарных” свор пять штук.

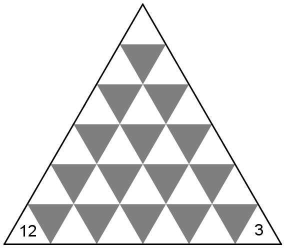
3. Треугольник ABC вписан в окружность с центром O. Его высоты CC_1 и BB_1 пересекаются в точке H. Известно, что $AC_1 = CC_1$. Докажите, что OC_1HB_1 — параллелограмм.

Решение.



Заметим, что в равнобедренном треугольнике ACC_1 высота и серединный перпендикуляр, проведенные к стороне AC, совпадают. Следовательно, $C_1O \perp AC$, а значит $C_1O \parallel HB_1$. Также из треугольника ACC_1 находим $\angle CAC_1 = 45°$. Теперь заметим, что в треугольнике ABB_1 $\angle ABB_1 = 180° - 90° - 45° = 45° = \angle BAB_1$. Значит треугольник ABB_1 тоже равнобедренный и $B_1O \perp AB \Rightarrow B_1O \parallel HC_1$, что завершает доказательство.

4. Треугольник разбит на белые и серые треугольнички (см. рис.).



Изначально в двух угловых треугольничках записаны числа 12 и 3. Андрей вписал произвольные натуральные числа в остальные белые треугольнички. Оказалось, что для любого серого треугольничка сумма чисел в трех соседних с ним по стороне белых делится на 5. Какое число могло быть вписано в верхний угловой треугольничек? Опишите все варианты и докажите, что других нет.

Ответ. Любое целое число, делящееся на 5.

Решение. Пусть в треугольнички нижнего ряда Андрей записал слева направо числа $a; b; c; d$. Тогда в треугольничках второго снизу ряда записаны слева направо числа вида

$$-a + 3 + 5k_1; \quad -a - b + 5k_2; \quad -b - c + 5k_3; \quad -c - d + 5k_4; \quad -d - 3 + 5k_5.$$

Здесь $k_1, k_2, \ldots, k_5$ — произвольные целые числа. Тогда в треугольнички третьего снизу ряда записаны слева направо числа вида

$$2a + b - 3 + 5k_6; \quad a + 2b + c + 5k_7; \quad b + 2c + d + 5k_8; \quad c + 2d + 3 + 5k_9.$$

Здесь $k_6, \ldots, k_9$ — произвольные целые числа. Тогда в треугольнички четвертого снизу ряда записаны слева направо числа вида

$$-3a - 3b - c + 3 + 5k_{10}; \quad -a - 3b - 3c - d + 5k_{11}; \quad -b - 3c - 3d - 3 + 5k_{12}.$$

Здесь k_{10}, k_{11}, k_{12} — произвольные целые числа. Тогда в треугольнички пятого снизу ряда записаны слева направо числа вида

$$4a + 6b + 4c + d - 3 + 5k_{13}; \quad a + 4b + 6c + 4d + 3 + 5k_{14}.$$

Здесь k_{13}, k_{14} — произвольные целые числа. Заметим, что сумма последних двух чисел всегда делится на 5. Это означает, что число в верхнем треугольничке тоже должно делиться на 5. При этом любое такое число, конечно же, подойдет.

5. Алина и Полина играют в следующую игру. Сначала Алина выбирает натуральное число n, не являющееся точным квадратом. Затем Полина прибавляет к этому числу $n+1$. Если получился точный квадрат, то Полина победила. Иначе Алина прибавляет к этому числу $n+2$. Если получился полный квадрат, то Алина победила. Далее девочки по очереди прибавляют к имеющемуся числу $n+3, n+4, \ldots$. У них получаются числа $n, 2n+1, 3n+3, 4n+6, 5n+10, \ldots$. Как только одна из них получит точный квадрат, она объявляется победительницей. Докажите, что существует бесконечно много чисел n таких, что, начав с них, Алина победит.

Решение. Пусть Алина выбирает число $n = 3k^2 - 1$. Это число не является точным квадратом ни при каких k, так как $3k^2 - 1 \equiv 2 \pmod 3$, а квадраты целых чисел дают остатки только 0 и 1 по модулю 3. Следовательно, Алина может его выбрать. Тогда Полина на первом своем ходу получит число $6k^2-1$. Это число снова сравнимо с 2 по модулю 3, а значит, не может быть точным квадратом. На следующем ходу Алина получает число $9k^2 = (3k)^2$ и побеждает. Остается добавить, что k можно брать любым, а различным значениям k соответствуют различные n.