Отдел по образованию
Кобринского районного исполнительного комитета
ГУО “СШ №8 г.Кобрина”

О двух уточнениях неравенства Эрмита-Адамара для MN-выпуклых функций

Выполнила:
Калинчук Валерия 10 “А” класс
ГУО “СШ №8 г.Кобрина”

Руководитель:
Горский С.М., преподаватель
АНО ДПО “Научно-исследовательский и образовательный центр “ДжетБрейнс”

Кобрин, 2021 г.

Содержание

Введение

Напомним некоторые определения.
Пусть I, J — связные подмножества $\mathbb{R}$.

Определение 1. Функция $f\colon I \to \mathbb{R}$ называется *выпуклой*, если для любого $\lambda \in [0;1]$ и любых a, $b \in I$ выполняется неравенство

$$f\big((1-\lambda)a + \lambda b\big) \leqslant (1-\lambda)f(a) + \lambda f(b).$$

Определение 2. Пусть $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$ — монотонная функция. Через $\mathfrak{K}_{\lambda,\varphi}$ будем обозначать *среднее взвешенное Колмогорова*

$$\mathfrak{K}_{\lambda,\varphi}(a,b) = \varphi^{-1}\big((1-\lambda)\varphi(a) + \lambda\varphi(b)\big),$$

где $\lambda \in [0;1]$.

Определение 3. [1] Пусть φ, ψ — монотонные функции. Функцию $f\colon I \to \mathbb{R}$ будем называть $\mathfrak{K}_{\lambda,\varphi}\mathfrak{K}_{\lambda,\psi}$*-выпуклой на* I, если для любых a, $b \in I$ и любого $\lambda \in [0;1]$ будет выполняться неравенство

$$f\big(\mathfrak{K}_{\lambda,\varphi}(a,b)\big) \leqslant \mathfrak{K}_{\lambda,\psi}\big(f(a), f(b)\big).$$

Пример 1. Функция $f(x)$ является $\mathfrak{K}_{\frac{1}{2},\varphi}\mathfrak{K}_{\frac{1}{2},\psi}$-выпуклой на $(0;+\infty)$:

№	f	φ	ψ
1.	x^2	x	x
2.	x^2	x	x^2
3.	x^2	$\ln x$	x
4.	x^2	$\frac{1}{x}$	x
5.	$x^2+\sin x$	$\ln x$	x

Для проверки является ли функция $\mathfrak{K}_{\lambda,\varphi}\mathfrak{K}_{\lambda,\psi}$-выпуклой есть следующий критерий.

Лемма 1. *Пусть ψ — возрастающая (убывающая) и $f\colon I\to\mathbb{R}$ — непрерывная функция. Функция f есть $\mathfrak{K}_{\lambda,\varphi}\mathfrak{K}_{\lambda,\psi}$- выпуклая функция тогда и только тогда, когда $\psi\left(f(\varphi^{-1}(x))\right)$ выпукла (вогнута) на $\varphi(I)$.*

В статье [2] предложен способ построения $\mathfrak{K}_{\psi}\mathfrak{K}_{\varphi}$-выпуклых функций для заданных ψ и φ.

Для выпуклых функций широко известно неравенство Эрмита–Адамара.

Теорема 1 (Эрмит–Адамар)**.** *Пусть $f\colon[a;b]\to\mathbb{R}$ есть выпуклая функция, тогда справедливо следующее неравенство*

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leqslant\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

В статье [3] приведено следующее обобщение теоремы 1 для $\mathfrak{K}_{\frac{1}{2},\varphi}\mathfrak{K}_{\frac{1}{2},\psi}$-выпуклых функций.

Теорема 2. *Пусть* $f\colon [a;b] \to \mathbb{R}$ *есть* $\mathfrak{K}_{\frac{1}{2},\varphi}\mathfrak{K}_{\frac{1}{2},\psi}$*-выпуклая функция,* φ *есть дифференцируемая функция. Тогда*

$$f\big(\mathfrak{K}_{\frac{1}{2},\varphi}(a,b)\big) \leqslant \psi^{-1}\left(\frac{1}{\varphi(b)-\varphi(a)}\int\limits_a^b \psi\big(f(x)\big)\mathrm{d}\varphi(x)\right) \leqslant \mathfrak{K}_{\frac{1}{2},\psi}\big(f(a), f(b)\big).$$

Покажем применение теоремы 2.

Пример 2. Функция $f(x) = \dfrac{x^2+\sin(x)}{x}$ не является выпуклой, поэтому к ней не применима теорема 1. Но поскольку $\int\limits_1^2 f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_1^2 (x^2+\sin x)\mathrm{d}(\ln x)$ и функция $x^2+\sin x$ есть $\mathfrak{K}_{\frac{1}{2},\ln x}\mathfrak{K}_{\frac{1}{2},x}$-выпуклая (см. пример 1), то

$$(2+\sin\sqrt{2})\ln 2 \leqslant \int\limits_1^2 \frac{x^2+\sin x}{x}\mathrm{d}x \leqslant \frac{5+\sin 2+\sin 1}{2}\cdot\ln 2$$

$$(2.07096 < 2.15933 < 2.33964)$$

В 1992 году Драгомир предложил уточнение неравенства Эрмита-Адамара. В 2010 году Эль Фарисси предложил еще одно уточнение неравенства Эрмита-Адамара.
Целью работы является обобщение указанных теорем на случай $\mathfrak{K}_{\lambda,\varphi}\mathfrak{K}_{\lambda,\psi}$-выпуклых функций.

1 Обобщение теорем Эль-Фарисси и Драгомира

В 1992 Драгомир опубликовал следующую теорему:

Теорема 3 ([4]). *Пусть $f\colon [a;b] \to \mathbb{R}$ есть выпуклая функция, тогда для любого $\lambda \in [0;1]$ справедливо следующее неравенство*

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant H(\lambda) \leqslant \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{f(a)+f(b)}{2},$$

где

$$H(\lambda) = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f\left(\lambda x + (1-\lambda)\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x.$$

В 2010 Эль-Фарисси предложил следующие обобщение неравенства Эрмита-Адамара:

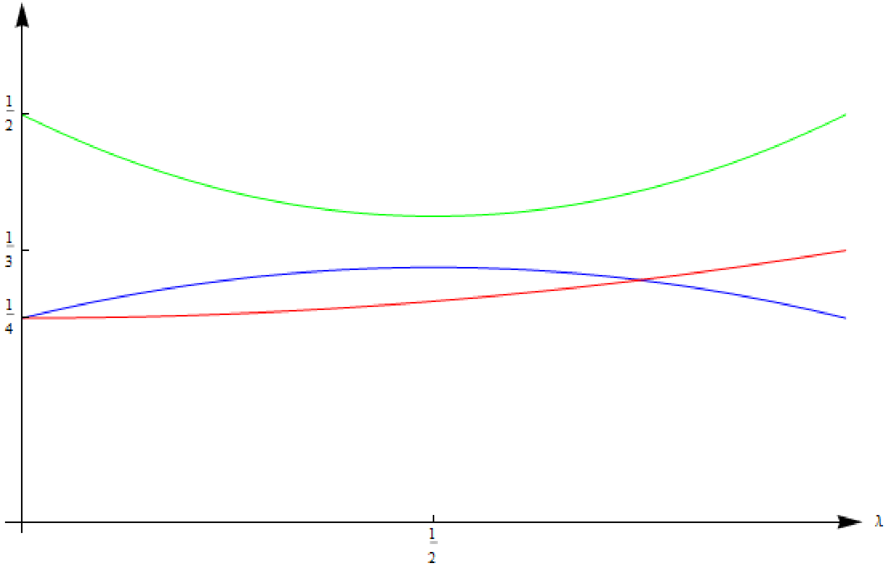
Теорема 4 ([5]). *Пусть* $f\colon [a;b] \to \mathbb{R}$ *есть выпуклая функция, тогда для любого* $\lambda \in [0;1]$ *справедливо следующее неравенство*

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant \mu(\lambda) \leqslant \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \mathcal{M}(\lambda) \leqslant \frac{f(a)+f(b)}{2},$$

где

$$\mu(\lambda) = \lambda f\left(\frac{(2-\lambda)a+\lambda b}{2}\right) + (1-\lambda) f\left(\frac{(1-\lambda)a+(1+\lambda)b}{2}\right),$$
$$\mathcal{M}(\lambda) = \frac{1}{2}\Big(f\big((1-\lambda)a+\lambda b\big) + \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b)\Big).$$

На рисунке ниже приведена оценка интеграла $\int\limits_0^1 x^2 \mathrm{d}x$ по теоремам 3 и 4. Точное значение интеграла равно $\frac{1}{3}$, нижняя и верхняя оценки по неравенству Эрмита–Адамара есть $\frac{1}{4}$ и $\frac{1}{2}$. Красным цветом изображена функция $H(\lambda)$, синим и зелёным — функции $\mu(\lambda)$ и $\mathcal{M}(\lambda)$ соответственно.



Приведём теорему, которая обобщает теорему 3 для $\mathfrak{K}_{\frac{1}{2},\varphi}\mathfrak{K}_{\frac{1}{2},\psi}$-выпуклых функций.

Теорема 5. *Пусть* $f\colon [a;b] \to \mathbb{R}$ *есть* $\mathfrak{K}_{\frac{1}{2},\varphi}\mathfrak{K}_{\frac{1}{2},\psi}$*-выпуклая функция,* φ *есть дифференцируемая функция. Тогда*

$$f\big(\mathfrak{K}_{\frac{1}{2},\varphi}(a,b)\big) \leqslant \psi^{-1}\left(\frac{1}{\varphi(b)-\varphi(a)}\int_a^b \psi\left(f\left(\mathfrak{K}_{\lambda,\frac{1-\lambda}{2},\frac{1-\lambda}{2},\varphi}(x,a,b)\right)\right)\mathrm{d}\varphi(x)\right) \leqslant$$
$$\leqslant \psi^{-1}\left(\frac{1}{\varphi(b)-\varphi(a)}\int\limits_a^b \psi\big(f(x)\big)\mathrm{d}\varphi(x)\right) \leqslant \mathfrak{K}_{\frac{1}{2},\psi}\big(f(a),f(b)\big).$$

Доказательство. По лемме 1 $\psi(f(\varphi^{-1}(x)))$ есть выпуклая (вогнутая) функция на $[\varphi(a);\varphi(b)]$, если ψ — возрастающая (убывающая). Так же заметим, что ψ^{-1} есть возрастающая (убывающая) Применим к ней теорему 3 и ко всем частям применим ψ^{-1}. Если ψ была возрастающей, то все знаки неравенств сохраняются, если же она была убывающей, то все знаки неравенств дважды меняют свое направление. При этом оценка снизу, оценка сверху и интеграл перепишутся как и в теореме 2. Так как

$$\psi^{-1}\left(\frac{1}{\varphi(b)-\varphi(a)}\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)}\psi\left(f\left(\varphi^{-1}\left(\lambda\varphi(x)+(1-\lambda)\frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{2}\right)\right)\right)\mathrm{d}x\right)=$$
$$=\psi^{-1}\left(\frac{1}{\varphi(b)-\varphi(a)}\int_{a}^{b}\psi\left(f\left(\mathfrak{K}_{\lambda,\frac{1-\lambda}{2},\frac{1-\lambda}{2},\varphi}(x,a,b)\right)\right)\mathrm{d}\varphi(x)\right)$$

$\square$

Приведём теорему, которая обобщает теорему 4 для $\mathfrak{K}_{\frac{1}{2},\varphi}\mathfrak{K}_{\frac{1}{2},\psi}$-выпуклых функций.

Теорема 6. *Пусть* $f\colon [a;b]\to\mathbb{R}$ *есть* $\mathfrak{K}_{\frac{1}{2},\varphi}\mathfrak{K}_{\frac{1}{2},\psi}$*-выпуклая функция,* φ *есть дифференцируемая функция. Тогда*

$$f\big(\mathfrak{K}_{\frac{1}{2},\varphi}(a,b)\big) \leqslant\ \mathfrak{K}_{\lambda,\psi}\big(f\big(\mathfrak{K}_{\frac{1+\lambda}{2},\varphi}(a,b)\big), f\big(\mathfrak{K}_{\frac{\lambda}{2},\varphi}(a,b)\big),\big) \leqslant$$
$$\leqslant \psi^{-1}\left(\frac{1}{\varphi(b)-\varphi(a)}\int\limits_a^b \psi\big(f(x)\big)\mathrm{d}\varphi(x)\right) \leqslant$$
$$\leqslant \psi^{-1}\left(\frac{1}{2}\left(\psi\left(f\big(\mathfrak{K}_{1-\lambda,\varphi}(a,b)\big)\right)+\lambda\psi(f(a))+(1-\lambda)\,\psi(f(b))\right)\right) \leqslant$$
$$\leqslant \mathfrak{K}_{\frac{1}{2},\psi}\big(f(a),f(b)\big).$$

Доказательство. Пусть ψ— возрастающая (убывающая) функция, тогда по лемме 1 функция $g(x)=\psi\left(f(\varphi^{-1}(x))\right)$ есть выпуклая (вогнутая) на $\varphi(I)$. Применим к функции g теорему 4 и далее действуем как и при доказательстве предыдущей теоремы. Применим ко всем частям данного неравенства ψ^{-1} и, заметив, что

$$\psi^{-1}\left(g\left(\frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{2}\right)\right) = f\big(\mathfrak{K}_{\frac{1}{2},\varphi}(a,b)\big);$$

$$\psi^{-1}\left(\lambda g\left(\frac{(2-\lambda)\varphi(a)+\lambda\varphi(b)}{2}\right)+(1-\lambda)g\left(\frac{(1-\lambda)\varphi(a)+(1+\lambda)\varphi(b)}{2}\right)\right)=$$
$$=\psi^{-1}\left(\lambda\psi\left(f\big(\mathfrak{K}_{\frac{\lambda}{2},\varphi}(a,b)\big)\right)+(1-\lambda)\,\psi\left(f\big(\mathfrak{K}_{\frac{1+\lambda}{2},\varphi}(a,b)\big)\right)\right)=$$
$$=\mathfrak{K}_{\lambda,\psi}\left(f\big(\mathfrak{K}_{\frac{1+\lambda}{2},\varphi}(a,b)\big),f\big(\mathfrak{K}_{\frac{\lambda}{2},\varphi}(a,b)\big)\right);$$

$$\psi^{-1}\left(\frac{1}{\varphi(b)-\varphi(a)}\int\limits_{\varphi(a)}^{\varphi(b)}g(y)\mathrm{d}y\right)=\psi^{-1}\left(\frac{1}{\varphi(b)-\varphi(a)}\int\limits_{a}^{b}\psi\big(f(x)\big)\mathrm{d}\varphi(x)\right);$$

$$\psi^{-1}\left(\frac{1}{2}\Big(g\big((1-\lambda)\varphi(a)+\lambda\varphi(b)\big)+\lambda g(\varphi(a))+(1-\lambda)g(\varphi(b))\Big)\right)=$$
$$=\psi^{-1}\left(\frac{1}{2}\left(\psi\left(f\big(\mathfrak{K}_{1-\lambda,\varphi}(a,b)\big)\right)+\lambda\psi(f(a))+(1-\lambda)\,\psi(f(b))\right)\right),$$

то получим требуемое. $\square$

2 Обобщение теорем Пачпатти

В 2003 Пачпатти опубликовал следующую теорему:

Теорема 7. *[6] Пусть $f, g\colon [a,b] \to [0;+\infty)$ — выпуклые функции. Тогда*

$$2f\left(\frac{a+b}{2}\right)g\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{6}M(a,b) - \frac{1}{3}N(a,b) \leqslant \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{3}M(a,b) + \frac{1}{6}N(a,b),$$

где

$$M(a,b) = f(a)g(a) + f(b)g(b),$$
$$N(a,b) = f(a)g(b) + f(b)g(a).$$

В этой же статье он привел условия, когда неравенство обращается в равенство:
Если мы выберем $a = 0$ и $b = 1$, положим, что функции $f(x) = cx$ и $g(x) = d(1-x)$, где c, d — положительные числа, то легко заметить, что полученные неравенства становятся равенствами.
Нами было доказано, что неравенство в теореме 7 обращается в равенство при более мягких условиях: если f и g — линейные функции, а $b = a + 1$.
Рассмотрим пример применения теоремы 7.

Пример 3. Рассмотрим функцию $(x+1)(x-2)^2$ на отрезке $[0;3]$. На данном отрезке функция не является выпуклой, поэтому к ней не применимо неравенство Эрмита-Адамара, но данная функция очевидным образом представима в виде произведения двух выпуклых функций. По этому для неё представима следующая оценка:

$$-\frac{23}{4} < \frac{7}{4} = \int_0^3 (x+1)(x-2)^2 \mathrm{d}x < \frac{11}{2}.$$

В 2013 году в статье [7] было сделано два уточнения теоремы 7:

Теорема 8. *Пусть $f, g\colon [a,b] \to [0;+\infty)$ — выпуклые функции. Тогда*

$$2f\left(\frac{a+b}{2}\right)g\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{12}\left(N\left(a, \frac{a+b}{2}\right) + N\left(\frac{a+b}{2}, a\right)\right) - \frac{1}{6}\left(N\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}\right) + N(a,b)\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{3}M(a,b) + \frac{1}{6}N(a,b),$$

где M и N из теоремы 7.

По данной теореме оценка из примера 3 приобретает вид:

$$-\frac{7}{2} < \frac{7}{4} = \int_0^3 (x+1)(x-2)^2 \mathrm{d}x < \frac{11}{2}.$$

Теорема 9. *Пусть* $f, g\colon [a,b] \to [0;+\infty)$ *— выпуклые функции. Тогда для любого* $\lambda \in [0;1]$

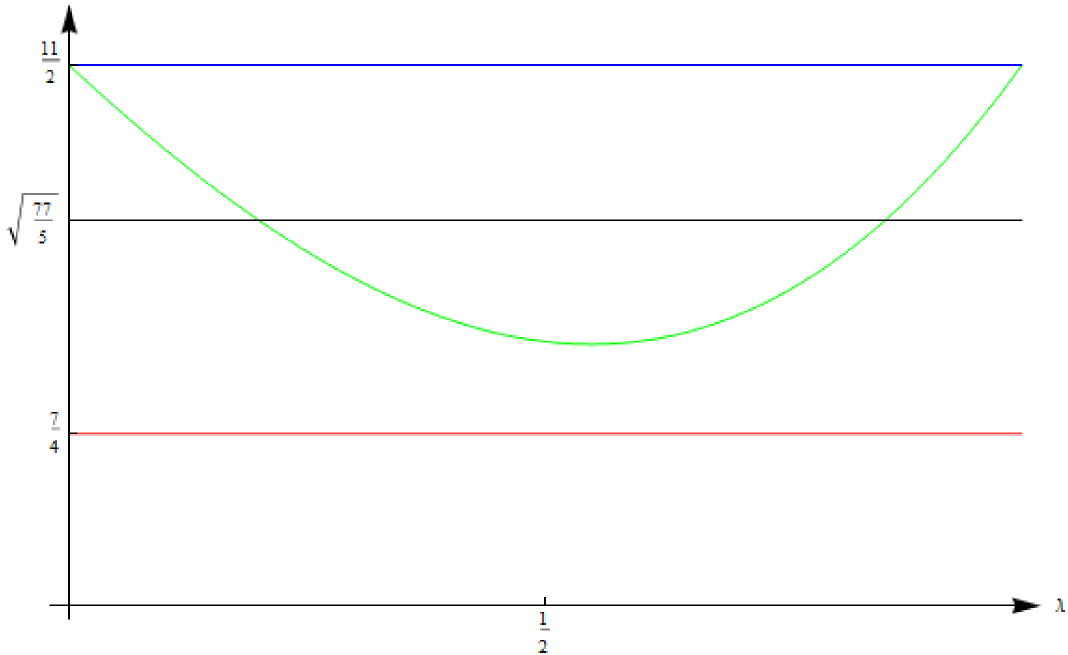
$$\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \leqslant L(\lambda) \leqslant \frac{1}{3}M(a,b) + \frac{1}{6}N(a,b),$$

где

$$L(\lambda) = \frac{\lambda}{3}M\big(a,(1-\lambda)a+\lambda b\big) + \frac{1-\lambda}{3}M\big((1-\lambda)a+\lambda b, b\big) + \\ + \frac{1}{6}N\big(a,(1-\lambda)a+\lambda b\big) + \frac{1-\lambda}{6}N\big((1-\lambda)a+\lambda b, b\big),$$

M *и* N *из теоремы 7.*

На рисунке ниже, для функции из примера 3 красным отмечено значение интеграла, чёрным — оценка по интегральному неравенству Коши-Буняковского, синим — оценка по теореме 7, зелёным — $L(\lambda)$.



Пример 4. Пусть left и left2 нижние оценки из теорем 7 и 8 соответственно. Тогда для $\int\limits_{-2}^{-1}(\frac{7}{16}x+1)(-2x-1)\mathrm{d}x$ выполняется left $<$ left2.

А для $\int\limits_{-2}^{-1}(-2x-1)(-2x-1)\mathrm{d}x$ выполняется left2 $<$ left.

В обоих случаях left и left2 положительны.

Пример 5. Если для $\int\limits_{y}^{z}(ax+b)(cx+d)\mathrm{d}x$ выполняется, что $bc+ad+ac(y+z)=0$, то left $=$ left2.

Пример 6. К сожалению, какого-то красивого условия, когда неравенство из теоремы 8 обращается в равенство не существует, но для

$$\int_{1}^{\frac{31}{16}}(2x-1)\left(-x+\frac{1163}{568}\right)\mathrm{d}x$$

его значение совпадает с left2.

Приведем теорему, которая обобщает теоремы 7 и 9 для $\mathfrak{K}_{\frac{1}{2},\varphi}\mathfrak{K}_{\frac{1}{2},x}$-выпуклых функций.

Только для случая $\psi(x)=x$;(

Теорема 10. *Пусть* $f, g\colon [a,b] \to [0;+\infty)$ — $\mathfrak{K}_{\lambda,\varphi}\mathfrak{K}_{\lambda,\psi}$*-выпуклые функции. Тогда*

$$2f\left(\mathfrak{K}_{\frac{1}{2},\varphi}(a,b)\right) g\left(\mathfrak{K}_{\frac{1}{2},\varphi}(a,b)\right) - \frac{1}{6}M(a,b) - \frac{1}{3}N(a,b) \leqslant \frac{1}{\varphi(b)-\varphi(a)}\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}\varphi(x) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{3}\mathfrak{K}_{\lambda,x}\left(M\left(\mathfrak{K}_{\lambda,\varphi}(a,b), b\right), M\left(a, \mathfrak{K}_{\lambda,\varphi}(a,b)\right)\right) \leqslant \frac{1}{3}M(a,b) + \frac{1}{6}N(a,b),$$

где M и N из теоремы 7.

Доказательство. Аналогично. □

Список литературы

[1] *Niculescu, C.P.*, Convexity according to means/ C.P. Niculescu// J. Math. Ineq. Appl.— 2003.— Vol.6, No.4 — P.571–579.

[2] *Горский С.М.*, $\mathfrak{H}_p\mathfrak{H}_q$-выпуклые функции и обобщение неравенств Гёльдера, Минковского и Мюрхеда/ С.М. Горский, В.И. Мурашко // Проблемы физики, математики и техники. — 2020.— №3(44). С. 61–66.

[3] *Мурошко, В.И.*, $\mathfrak{K}_\psi\mathfrak{K}_\varphi$-выпуклые функции и обобщение классических неравенств/ В.И. Мурашко, С.М. Горский, Я.И. Сандрыгайло// Проблемы физики, математики и техники. — 2018.— №4(37). С. 98–102.

[4] *Dragomir, S.S.*, Two mappings in connection to Hadamard's inequalities/ S.S. Dragomir// J. Math. Anal. Appl. 167 (1), 49–56 (1992).

[5] *El Farissi, A.*, Simple proof and refinement of Hermite–Hadamard inequality/ A. El Farissi// J. Math. Inequal. 4 (3), 365–369 (2010).

[6] *Pachpatte, B.G.*, On some inequalities for convex functions/ B.G. Pachpatte// RGMIA Res. Rep. Coll., 6 (E), 2003.

[7] *Chen, F.*, A note on Hermite–Hadamard inequalities for product of convex functions/ F. Chen// J. Appl. Math. Vol. 2013, Article ID 935020, http://dx.doi.org/10.1155/2013/935020