

3 тур интернет-олимпиады СУНЦ МГУ

Математика

8 класс

1. Положительные числа u и v таковы, что $u^2 + 3uv = 19$ и $3v^2 + uv = 37$. Чему может быть равно $u + 3v$?
2. Докажите, что для произвольных положительных x, y, z выполняется неравенство $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} \geq \frac{4x}{x+z}$.
3. Дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C , AA_1 и BB_1 — его биссектрисы. Точки A_2 и B_2 — основания перпендикуляров, опущенных из A_1 и B_1 на AB . Докажите, что центр вписанной окружности треугольника ABC совпадает с центром описанной окружности треугольника A_2B_2C .
4. Дана доска размером 2021×2021 , ее клетки раскрашены в черный и белый цвета в шахматном порядке так, что угловые клетки черные. Борис и Глеб играют в следующую игру. Борис ставит фишку в произвольную черную клетку. Глеб пытается накрыть оставшиеся клетки доски доминошками. Каждая доминошка накрывает две соседние по стороне клетки, доминошки нельзя накладывать одну на другую. Если Глебу удастся накрыть все клетки (кроме занятой фишкой Бориса), то он побеждает. Иначе побеждает Борис. Кто из мальчиков может обеспечить себе победу?
5. Соня знает, что у множества $X = \{1, 2, 3, \dots, 2021\}$ есть 2^{2021} подмножеств (включая пустое подмножество и само X). Она хочет выбрать из них некоторые N подмножеств и назвать их *прикольными*. При этом объединение любых двух прикольных подмножеств должно быть тоже прикольным, а объединение любых двух подмножеств, не являющихся прикольными, тоже не должно быть прикольным. Верно ли, что при любом N , не превосходящем 2^{2021} , Соне удастся это сделать?