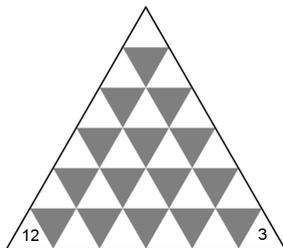


3 тур интернет-олимпиады СУНЦ МГУ

Математика

7 класс

1. Положительные числа u и v таковы, что $u^2 + 3uv = 49$ и $4v^2 + uv = 15$. Чему может быть равно $u + 2v$?
2. В одном дворе живут пять овчарок и одна дворняжка. Назовем *сворой* любую группу из двух или более собак. Каких свор во дворе больше — с дворняжкой или без дворняжки — и на сколько?
3. Треугольник ABC вписан в окружность с центром O . Его высоты CC_1 и BB_1 пересекаются в точке H . Известно, что $AC_1 = CC_1$. Докажите, что OC_1HB_1 — параллелограмм.
4. Треугольник разбит на белые и серые треугольнички (см. рис.).



Изначально в двух угловых треугольничках записаны числа 12 и 3. Андрей вписал произвольные целые числа в остальные белые треугольнички. Оказалось, что для любого серого треугольничка сумма чисел в трех соседних с ним по стороне белых делится на 5. Какое число могло быть вписано в верхний угловой треугольничек? Опишите все варианты и докажите, что других нет.

5. Алина и Полина играют в следующую игру. Сначала Алина выбирает натуральное число n , не являющееся точным квадратом. Затем Полина прибавляет к этому числу $n + 1$. Если получился точный квадрат, то Полина победила. Иначе Алина прибавляет к этому числу $n + 2$. Если получился полный квадрат, то Алина победила. Далее девочки по очереди прибавляют к имеющемуся числу $n + 3, n + 4, \dots$. У них получаются числа $n, 2n + 1, 3n + 3, 4n + 6, 5n + 10, \dots$. Как только одна из них получит точный квадрат, она объявляется победительницей. Докажите, что существует бесконечно много чисел n таких, что, начав с них, Алина победит.