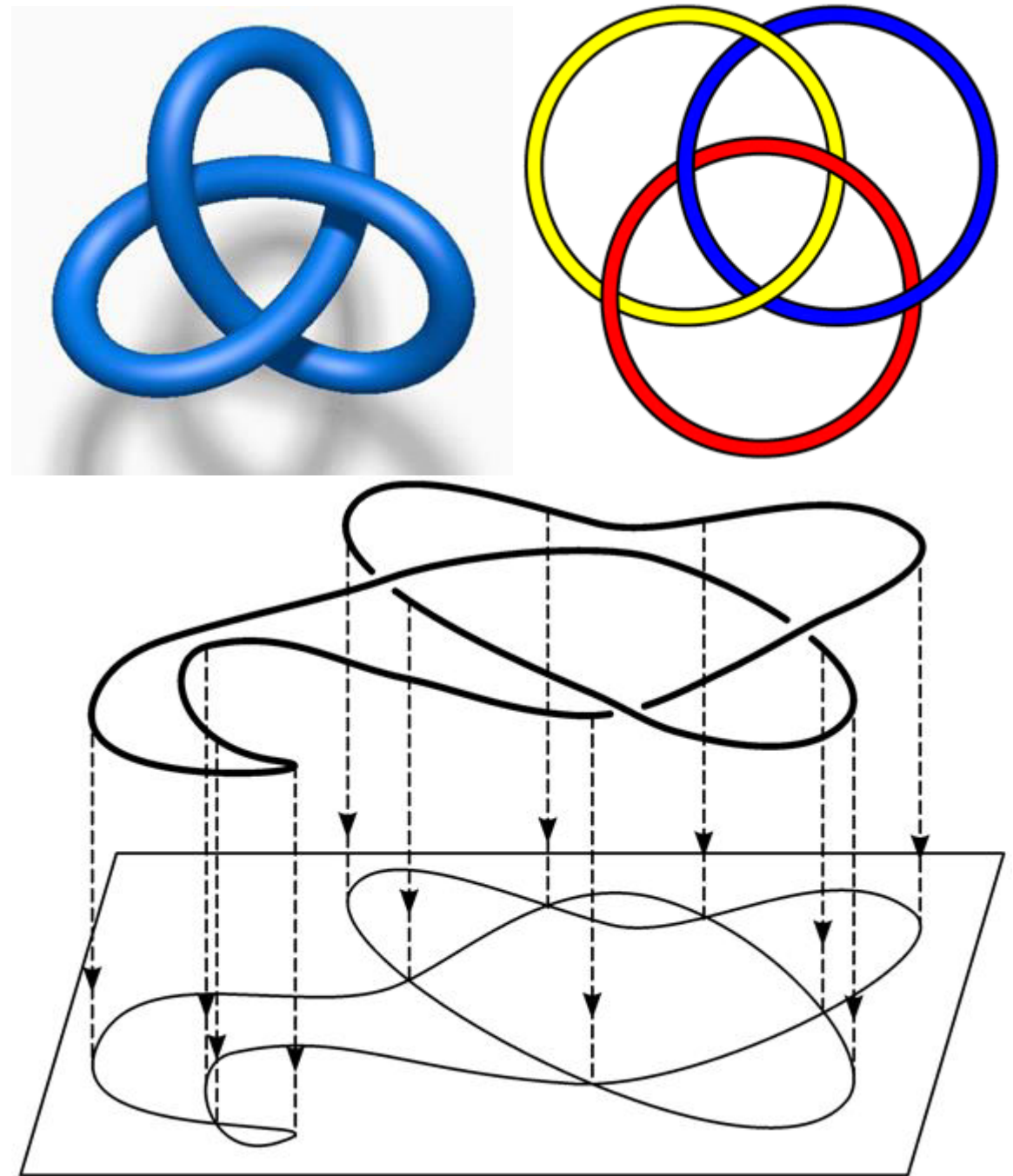
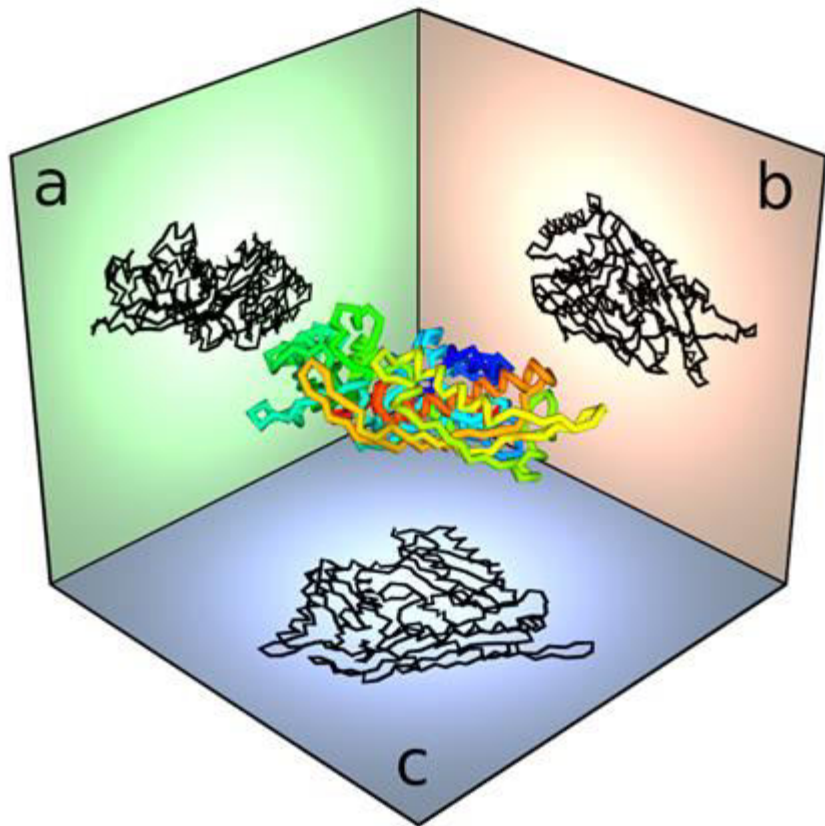




Взгляд на теорию узлов

Основные понятия

- Зацепления и узлы
- Компоненты зацепления
- Проекции и диаграммы



Изотопии зацеплений

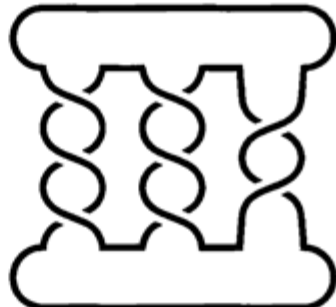
- Шевеление компонент называется изотопией зацепления.
- Два зацепления считаются равными (эквивалентными), если они изотопны.



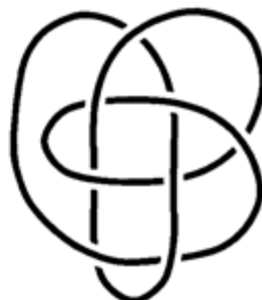
true-lovers' knot



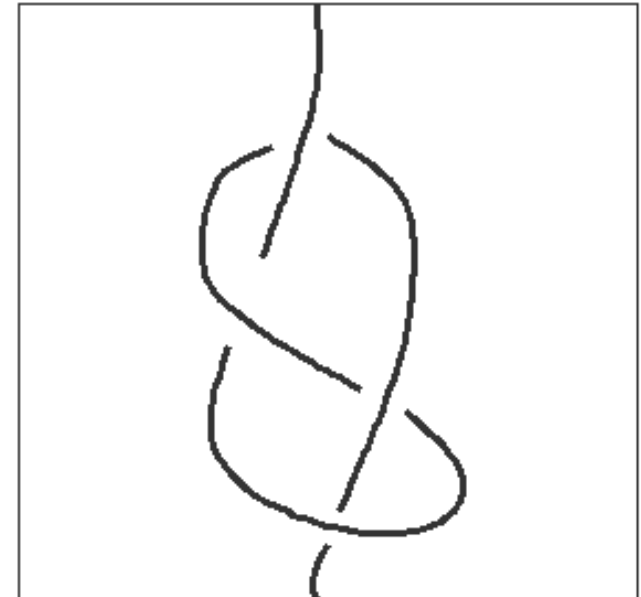
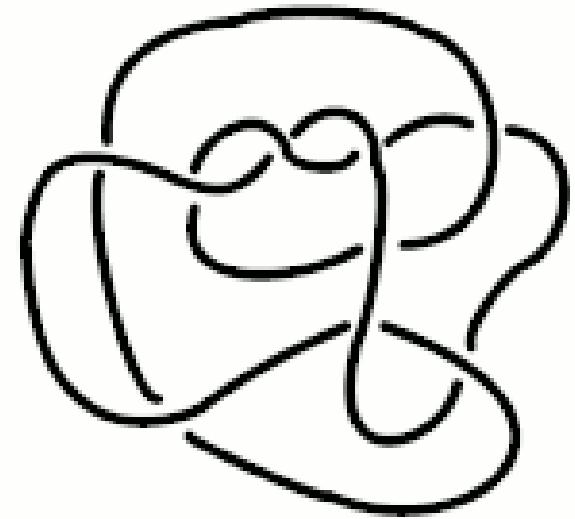
(3, 4) torus knot



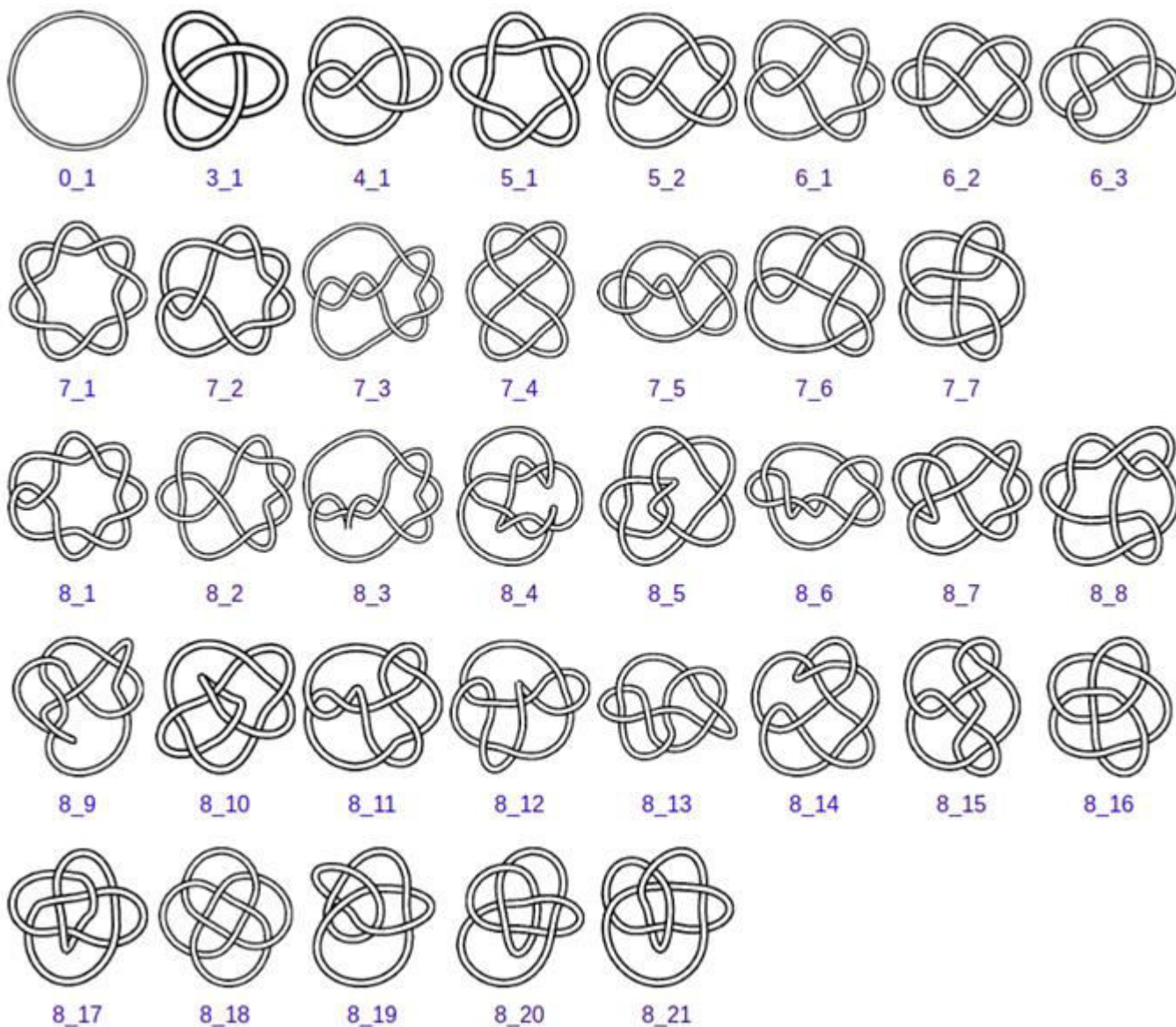
(3, 3, -2) pretzel knot



8_{19}^*



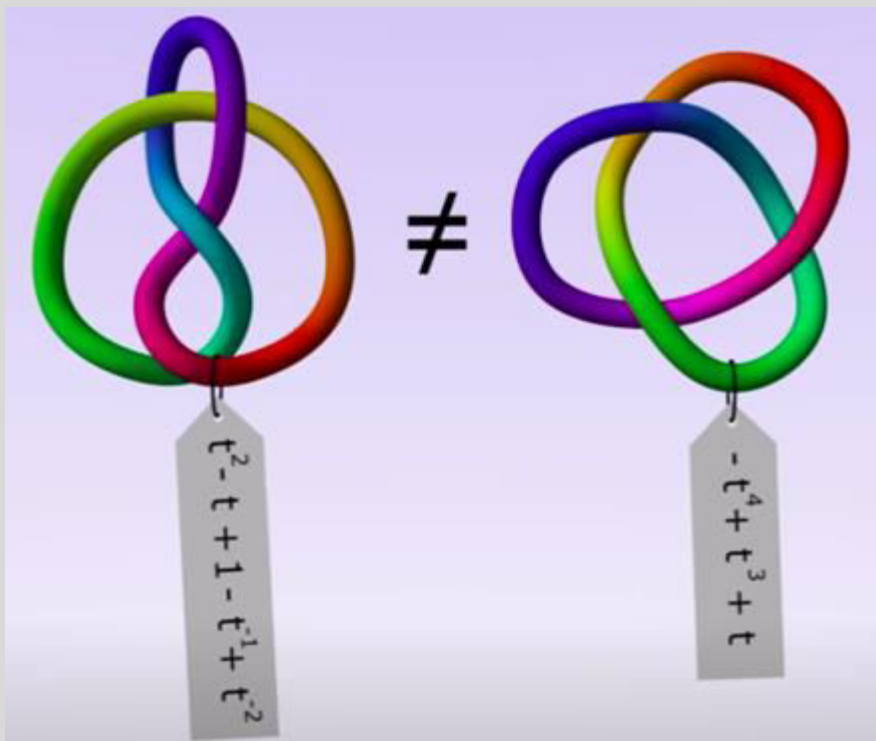
Атлас узлов



Отправные задачи первопроходцев

1. Составить список всех узлов;
(представления узлов)
2. Научиться определять, какому узлу в построенном списке соответствует любой наугад выбранный узел;
(задача распознавания)
3. Убедиться в том, что в списке нет повторов.
(поиск различий)

Как различать узлы?



KnotInfo: Table of Knots

About Database Download KnotFinder Linksinfo Please Cite KnotInfo

Basic Search Enter a knot Advanced search Clear All

Check the desired boxes in the sections below and then click SUBMIT to produce your desired table.

Submit

Select knots by crossing number

☒ 3-6 ☐ 7 ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ☐ 11a ☐ 11n ☐ 12a ☐ 12n ☒ All

Submit

Nomenclature

☒ Name ☐ Name Rank ☐ ED Notation ☐ DT Name ☐ DT Notation ☐ DT Rank ☐ Census Name ☐ Census Notation ☐ Gauss Notation ☐ Tetrahedral Census Name

Submit

3D Presentations and Properties

☐ Adequate ☐ Braid Notation ☐ Pretzel Notation ☐ Small or Large ☐ Almost Alternating ☐ Elliptic ☐ Quasialternating ☐ Symmetry Type ☐ Alternating ☐ Murasugi Notation ☐ Self-Link ☐ Two-Component

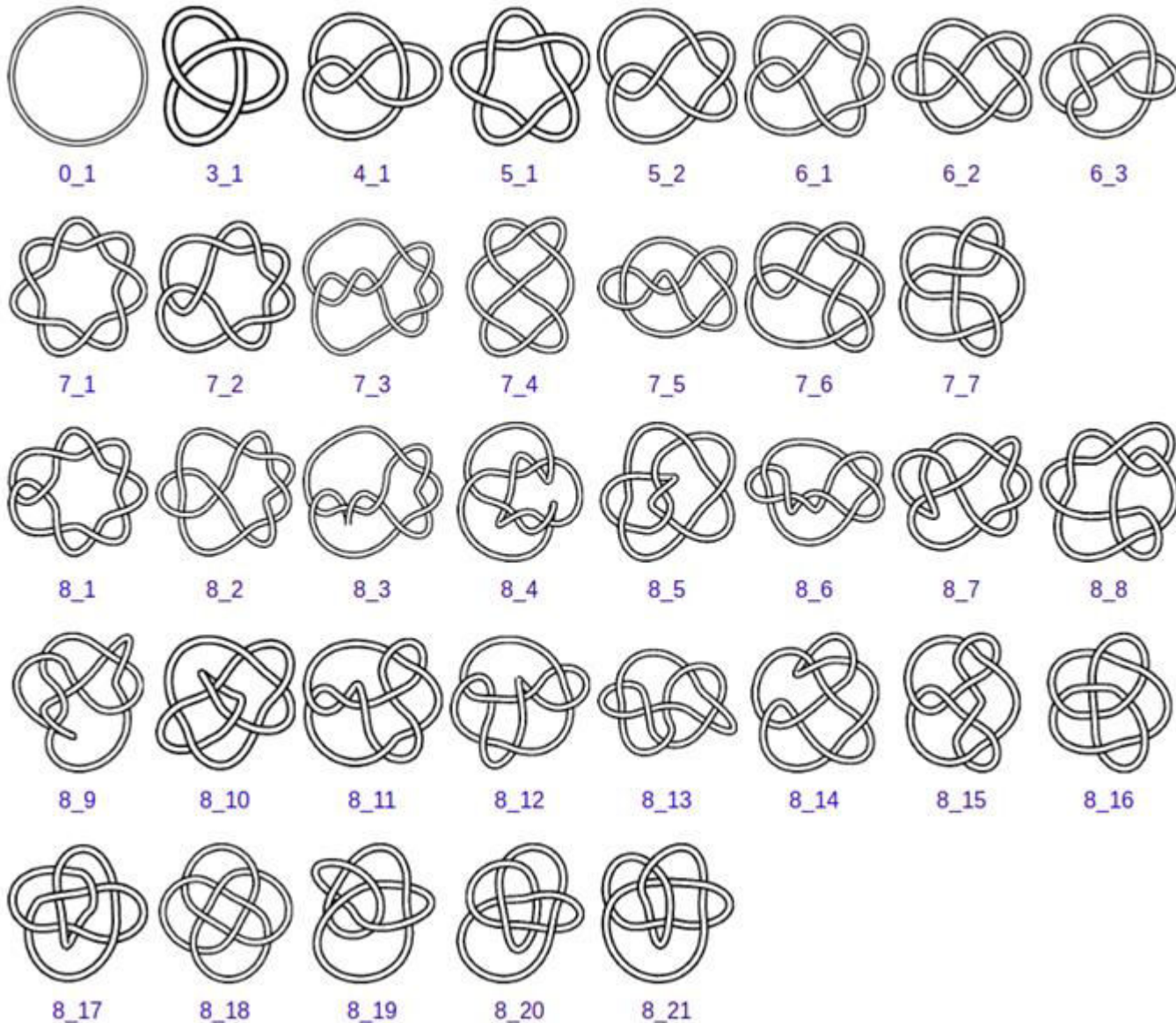
Submit

3D Numeric Invariants

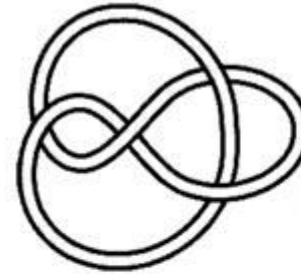
☐ Arc Index ☐ Crossing Number ☐ Nakamura Index ☐ Tunnel Number ☐ Braid Index ☐ Crossing Number ☐ Stick Number ☐ Braid Genus ☐ Braid Length ☐ Determinant ☐ Super Braid Index ☐ Unknotting Number ☐ Braid Index ☐ Genus 3D ☐ Thurston-Bennequin Number ☐ Torsion Numbers ☐ Class Number ☐ Morse-Novikov Number

knotinfo.math.indiana.edu

Атлас узлов



4_1



(KnotPlot image)

See the full Rolfsen Knot Table.

Visit 4_1's page at the Knot Server (KnotPlot driven, includes 3D interactive images!)

Visit 4_1 at Knotilus

4_1 is also known as "the Figure Eight knot", as some people think it looks like a figure '8' in one of its common projections. See e.g. [1].

For two 4_1 knots along a closed loop, see 10_59, 10_60, K12a975, and K12a991.



Square depiction



Alternate square depiction



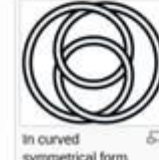
3D depiction



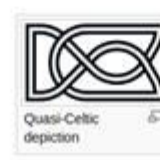
In "figure 8" form



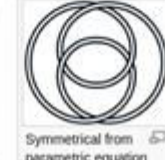
A Neli-Kolam with 3x2 dot array



In curved symmetrical form



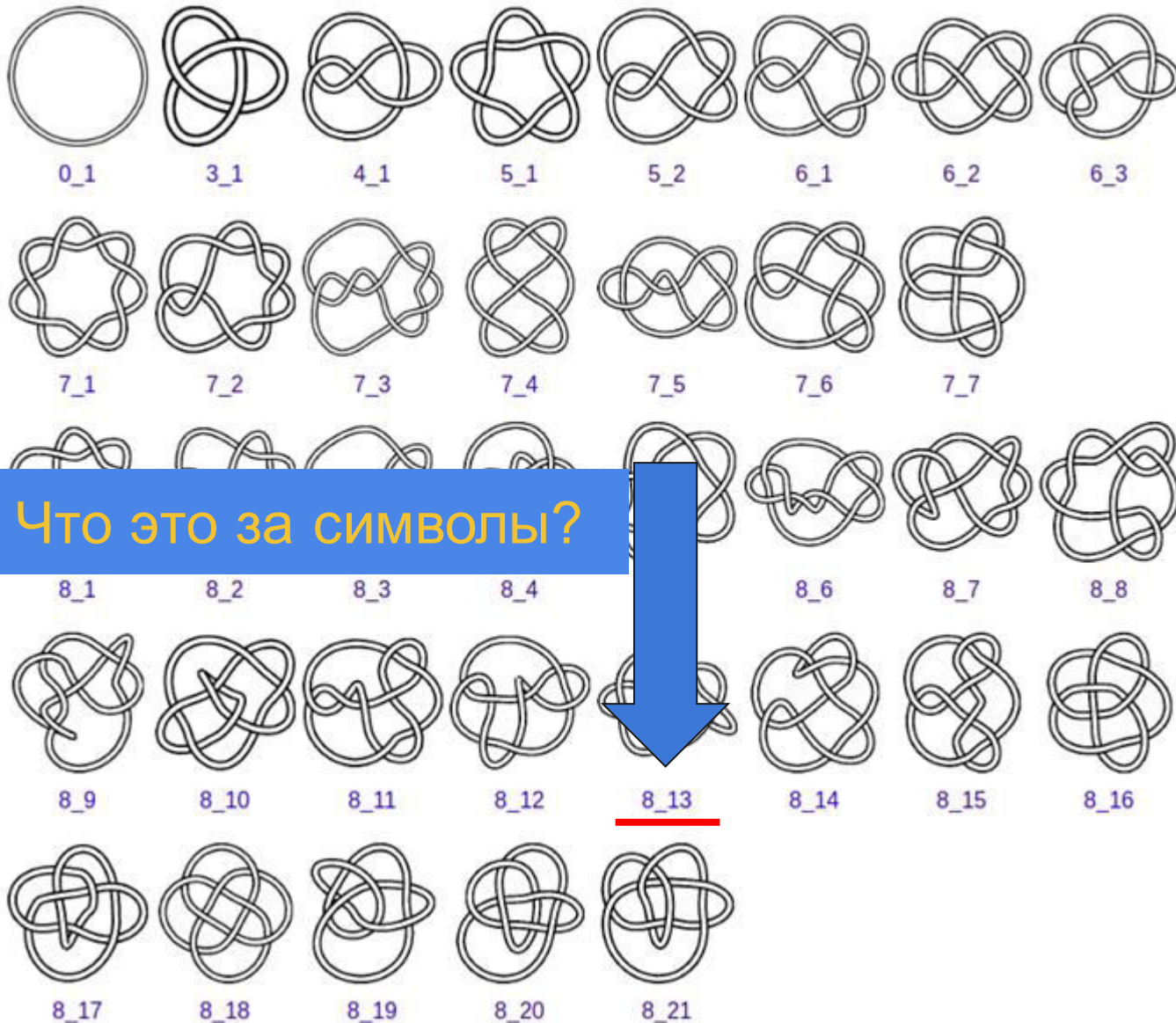
Quasi-Celtic depiction



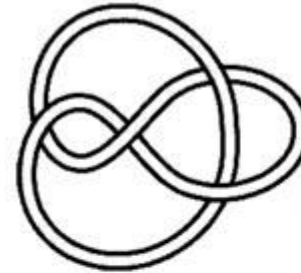
Symmetrical from parametric equation

http://katlas.org/wiki/The_Rolfsen_Knot_Table

Атлас узлов



4_1



(KnotPlot image)

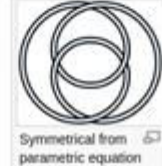
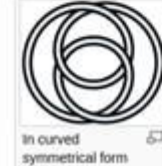
See the full Rolfsen Knot Table.

Visit 4_1's page at the Knot Server (KnotPlot driven, includes 3D interactive images!)

Visit 4_1 at Knotilus

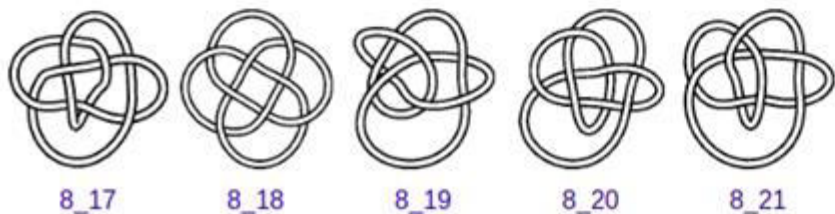
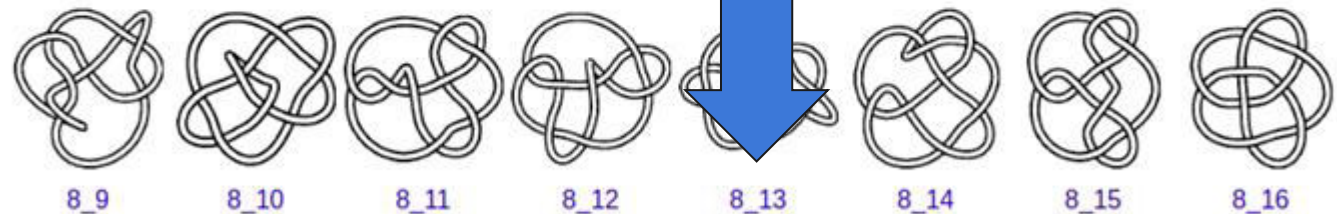
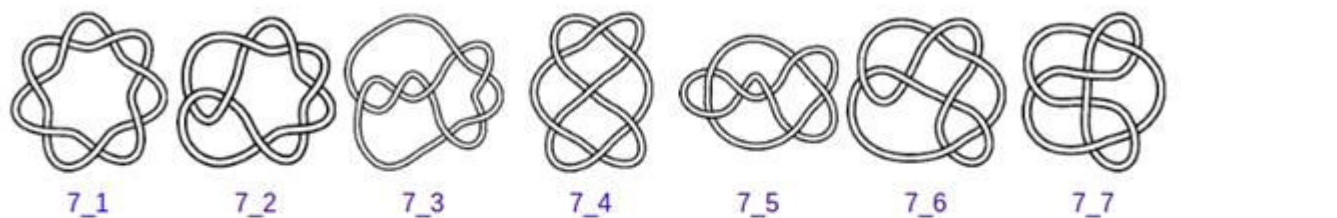
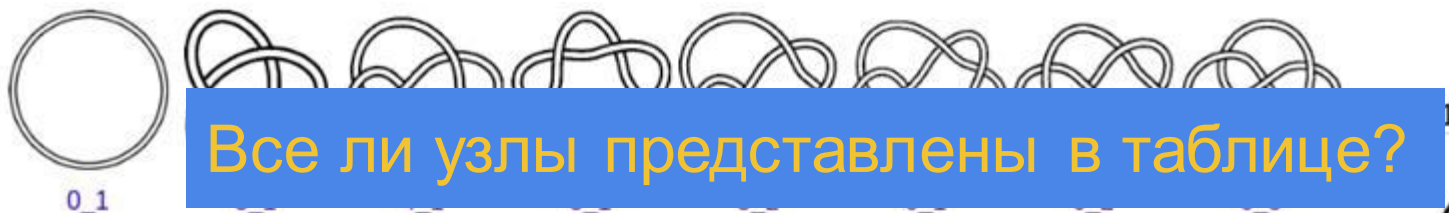
4_1 is also known as "the Figure Eight knot", as some people think it looks like a figure '8' in one of its common projections. See e.g. [1].

For two 4_1 knots along a closed loop, see 10_59, 10_60, K12a975, and K12a991.



http://katlas.org/wiki/The_Rolfsen_Knot_Table

Атлас узлов



(KnotPlot image)

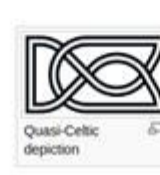
See the full Rolfsen Knot Table.

Visit 4_1's page at the Knot Server (KnotPlot driven, includes 3D interactive images!)

Visit 4_1 at Knotilus

4_1 is also known as "the Figure Eight knot", as some people think it looks like a figure '8' in one of its common projections. See e.g. [1].

For two 4_1 knots along a closed loop, see 10_59, 10_60, K12a975, and K12a991.



http://katlas.org/wiki/The_Rolfsen_Knot_Table



Решите задачу

Докажите, что на любой тени
диаграммы узла можно расставить
типы перекрёстков так, чтобы
получился тривиальный узел



alternating



positive



descending



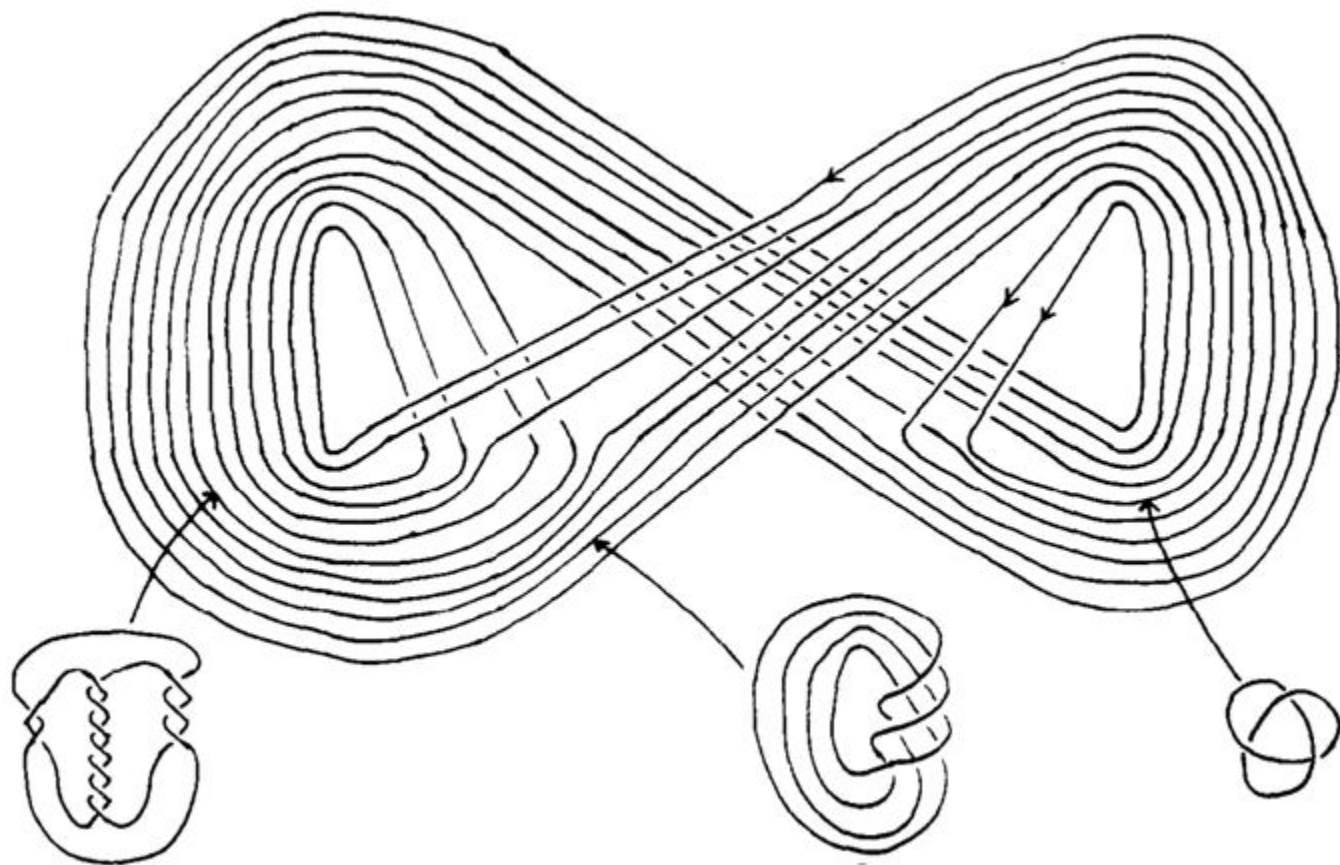
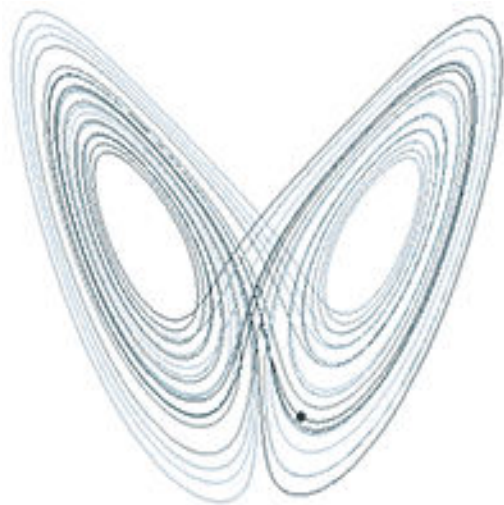
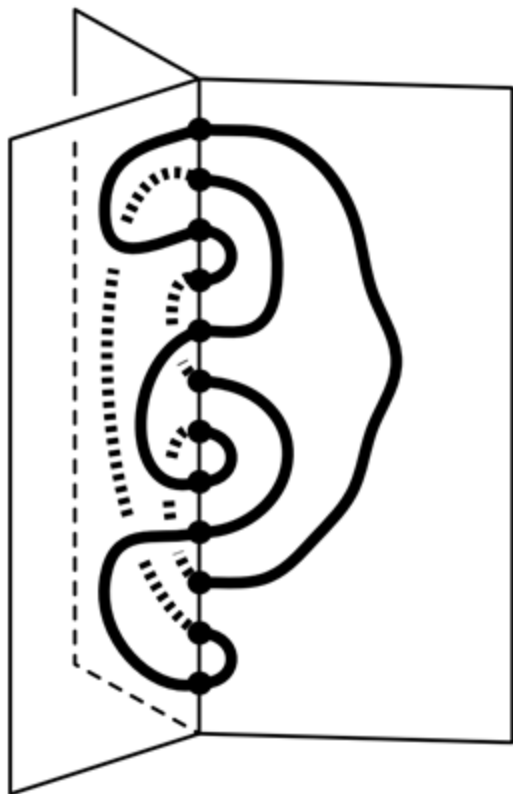
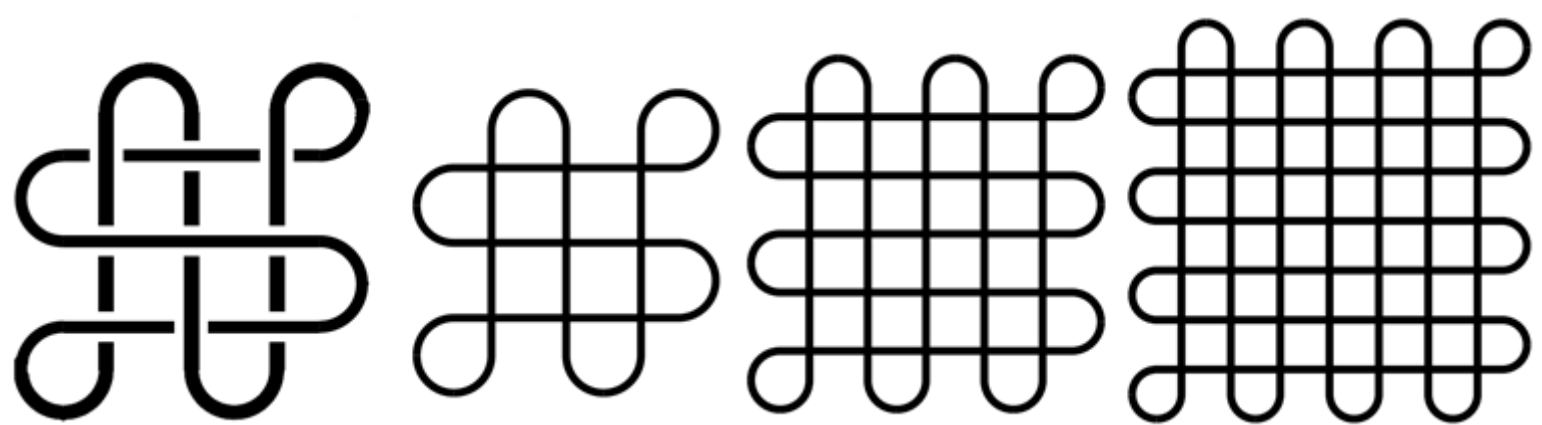
ascending



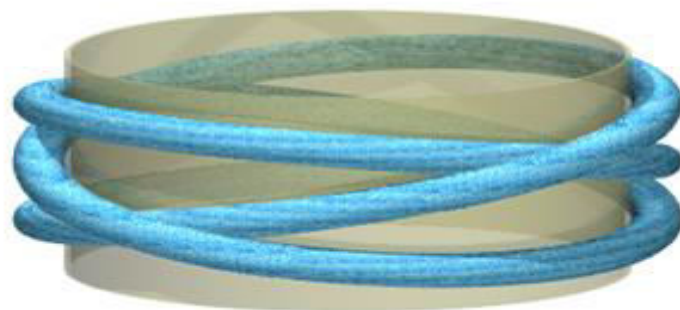
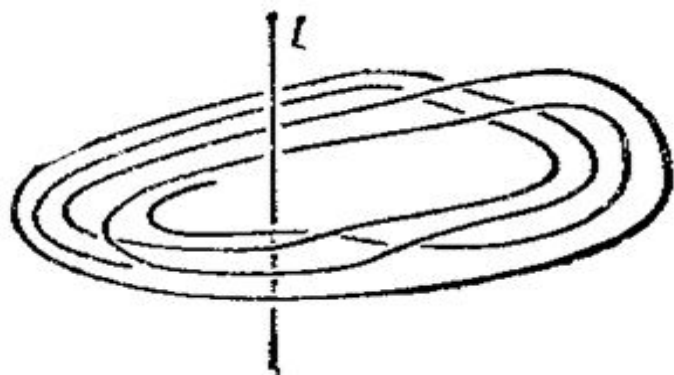
Представления узлов

Представления:

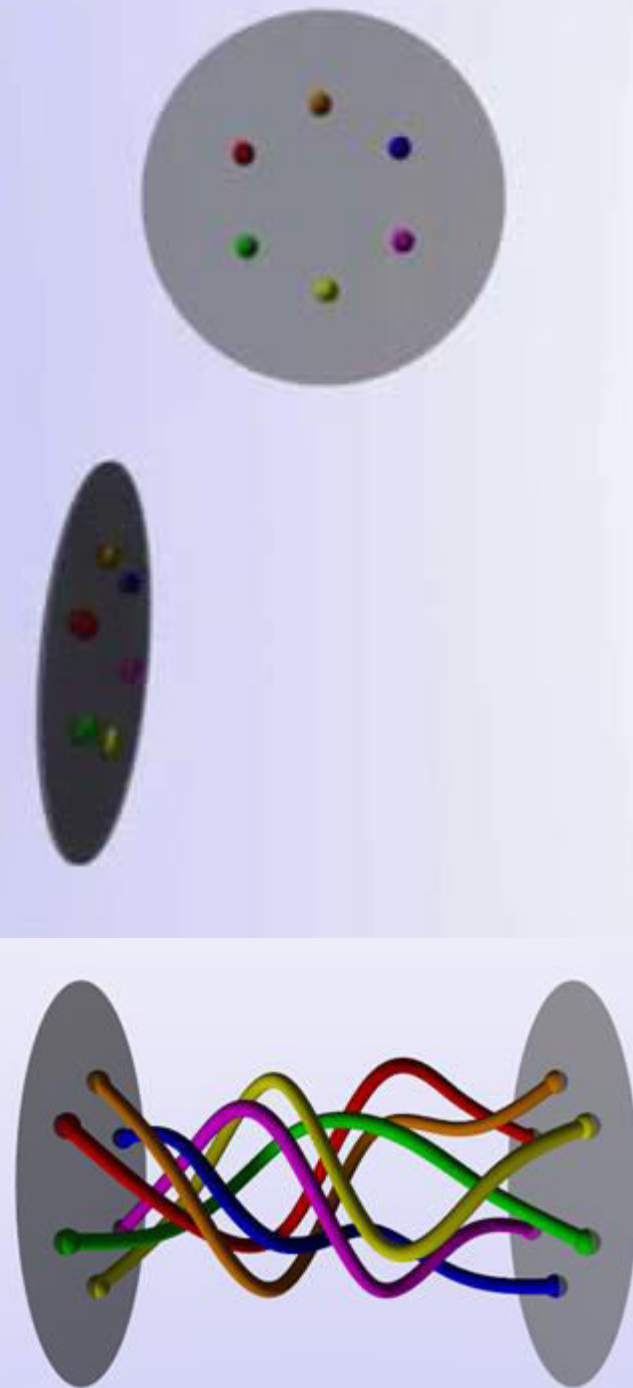
- в аттракторе Лоренца;
- прихватками;
- на страницах открытой книги;
- замкнутыми косами;

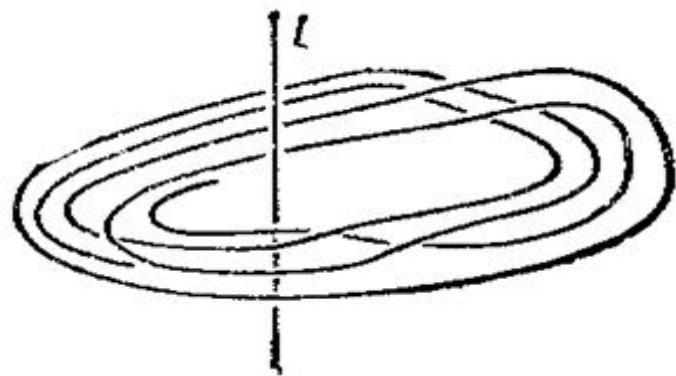


Косообразные представления узлов



Теорема Александера: Любой узел представляется в виде замкнутой косы



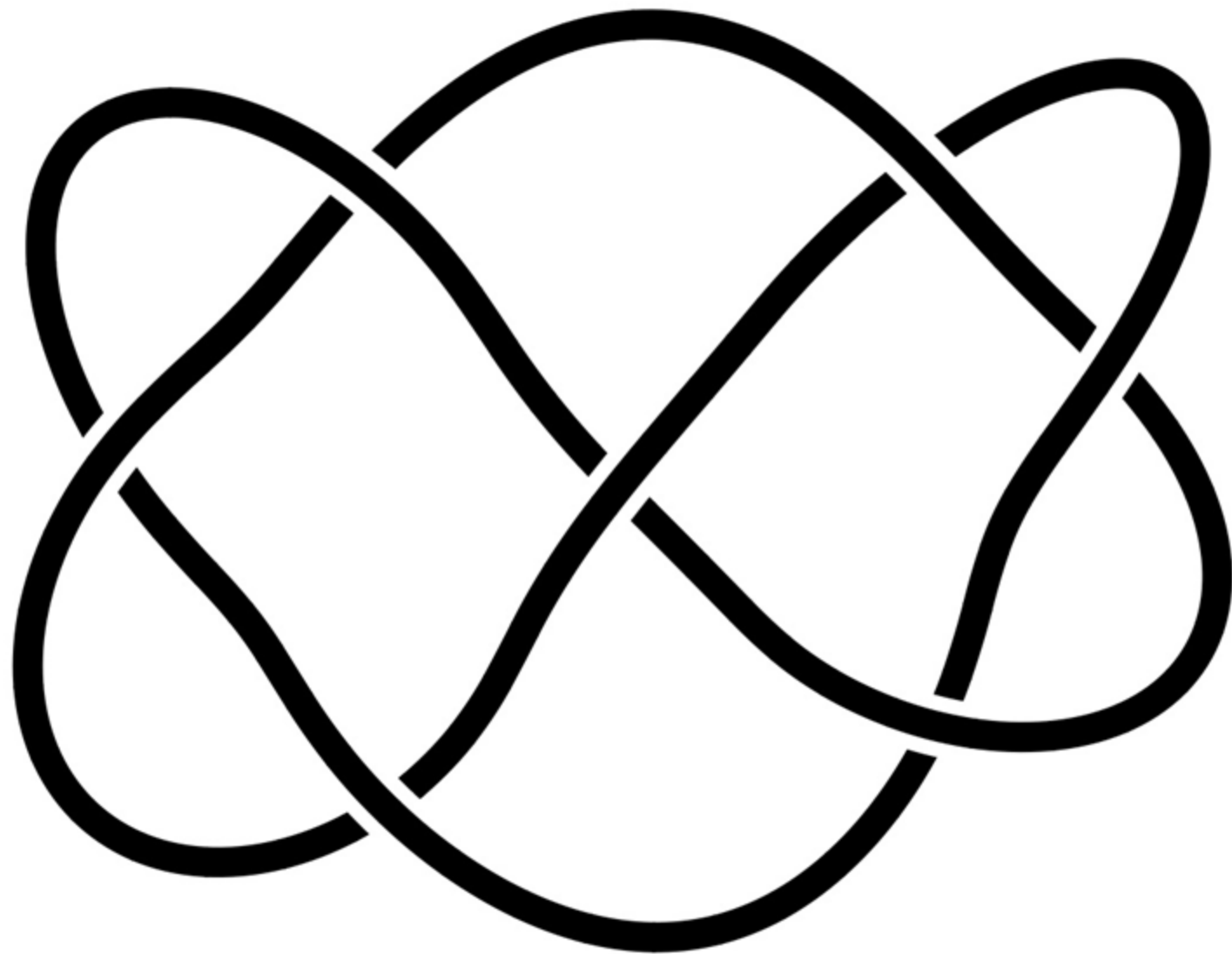
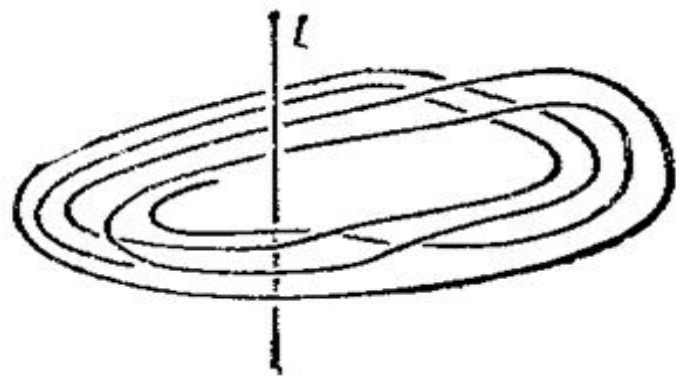


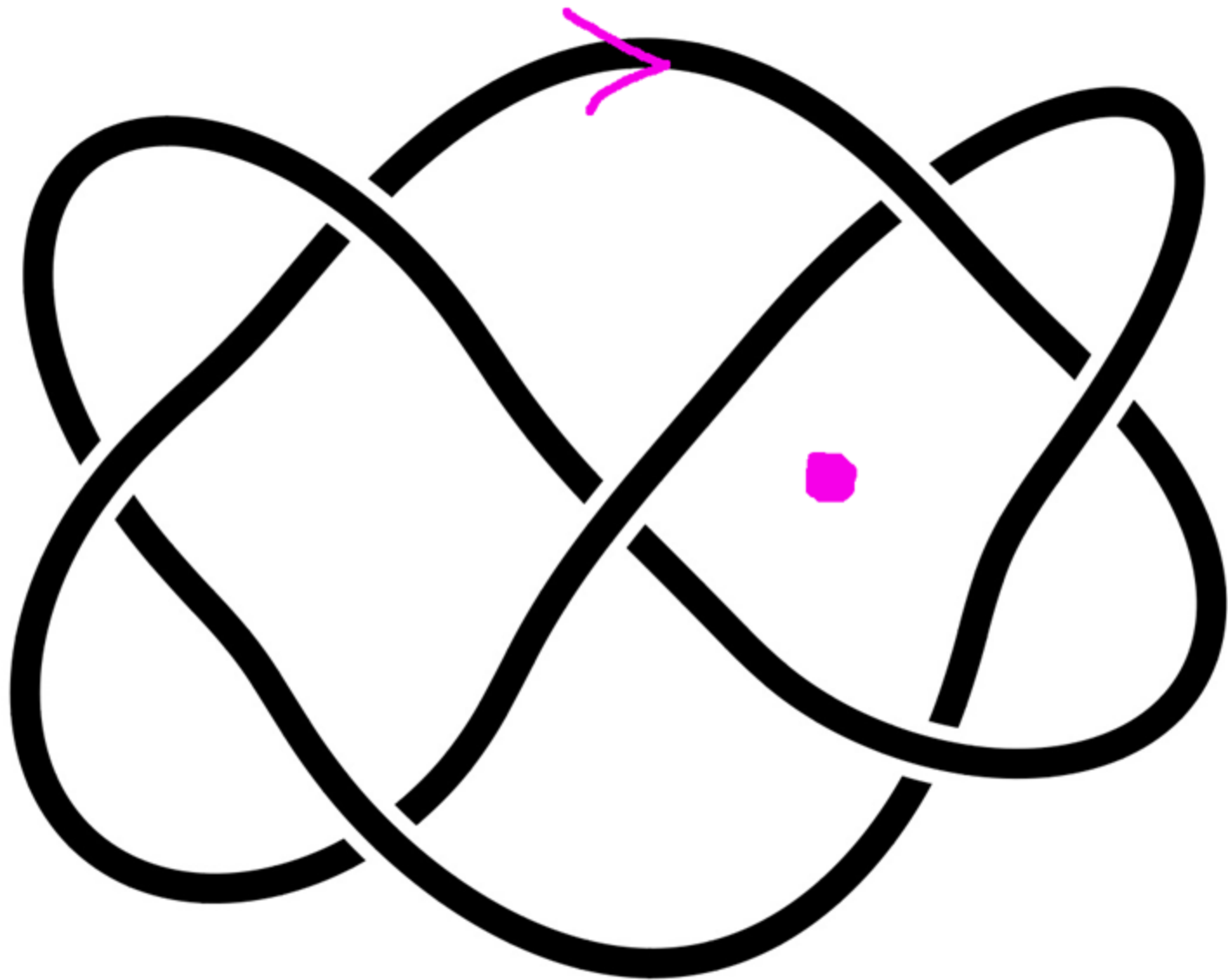
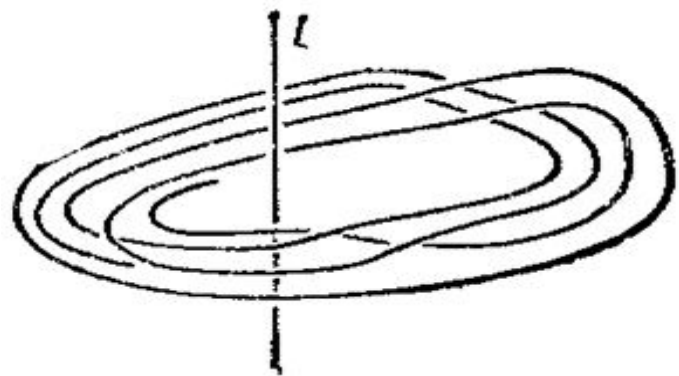
$$t^2 - t + 1 - t^{-1} + t^{-2}$$

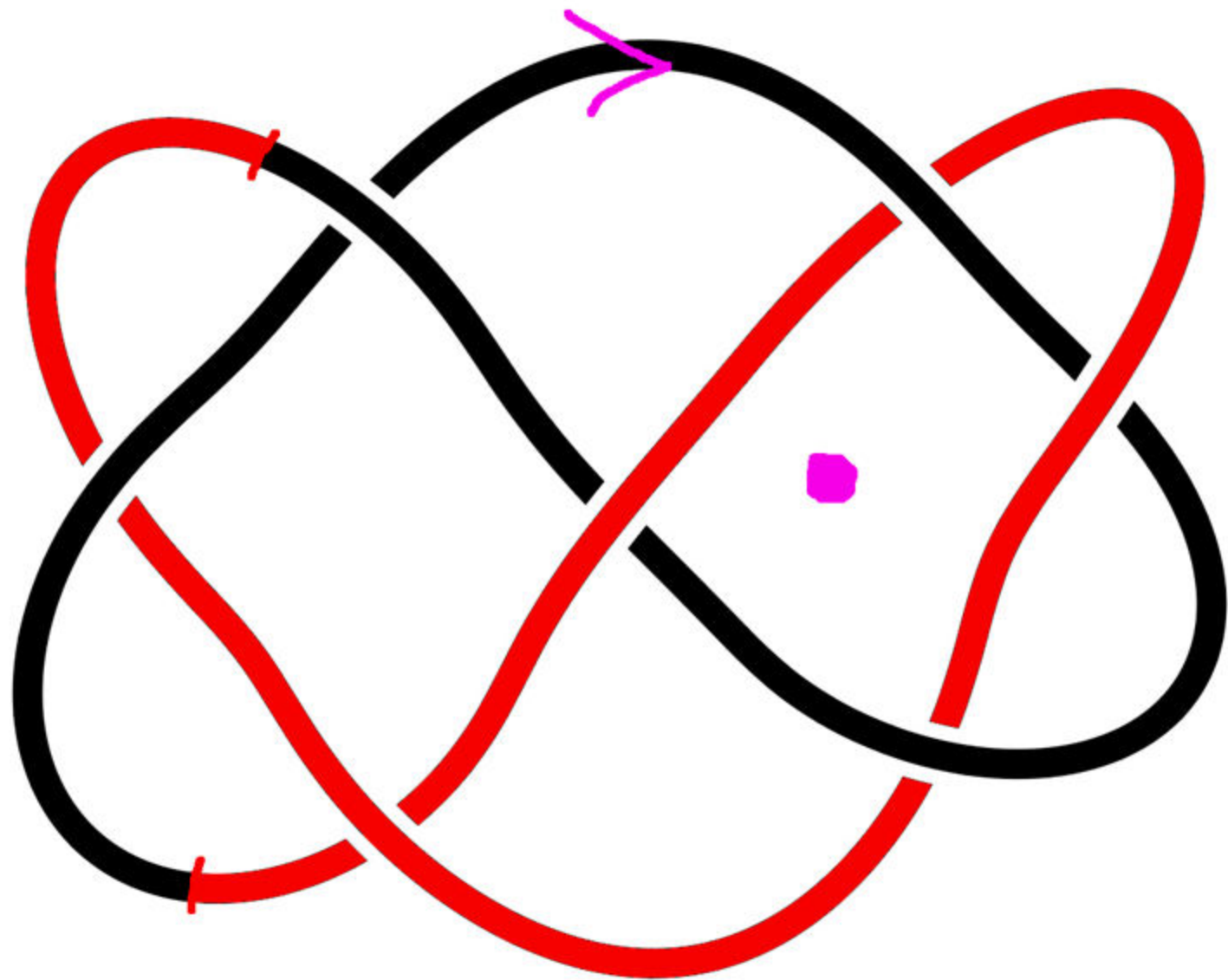
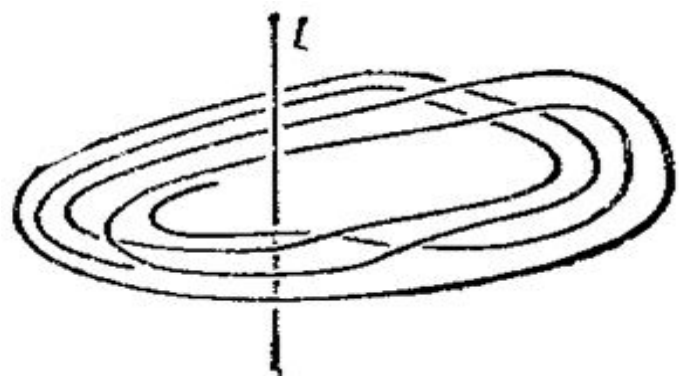
#

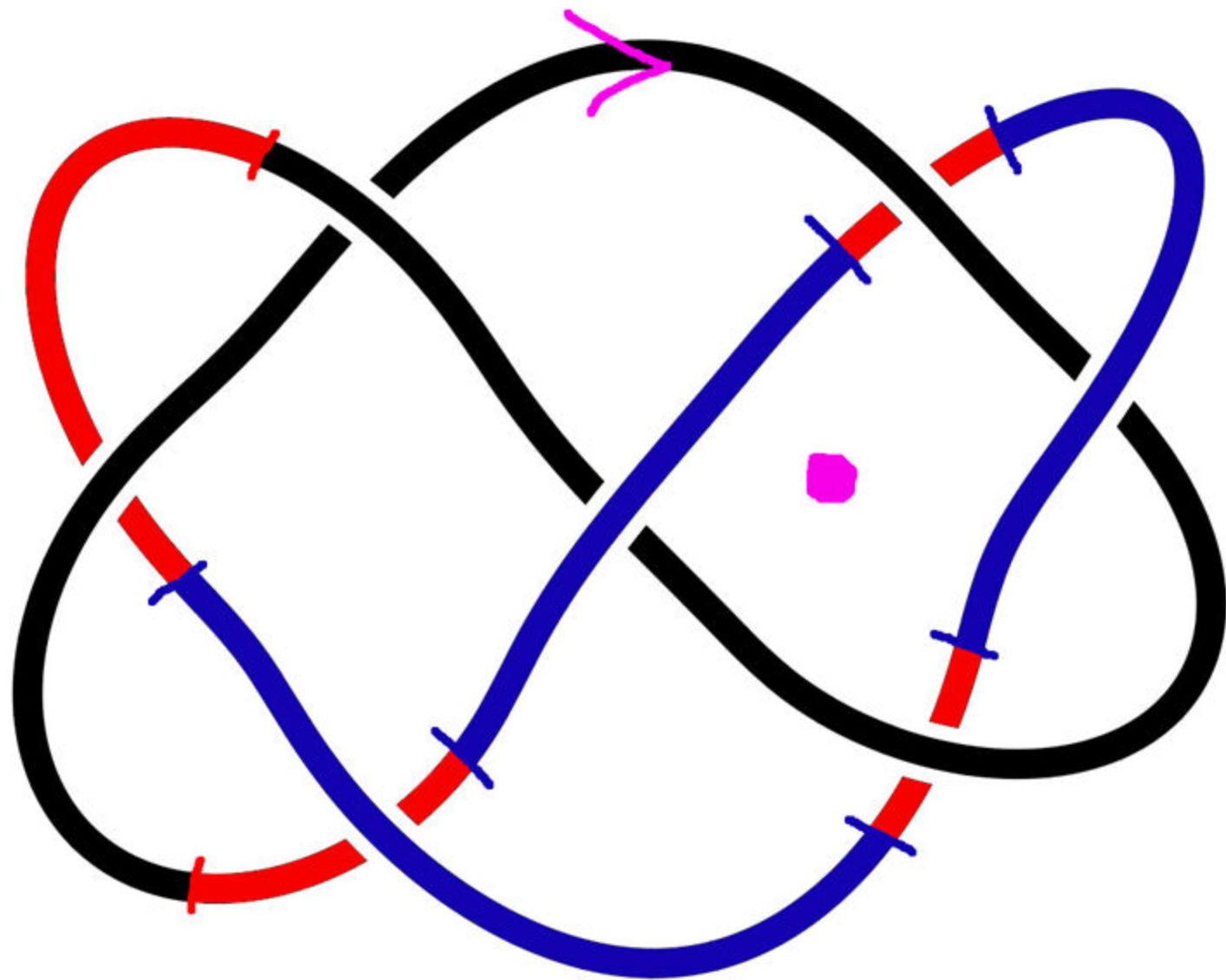
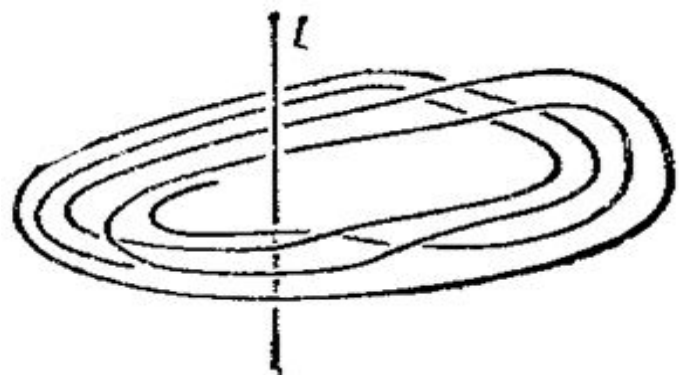


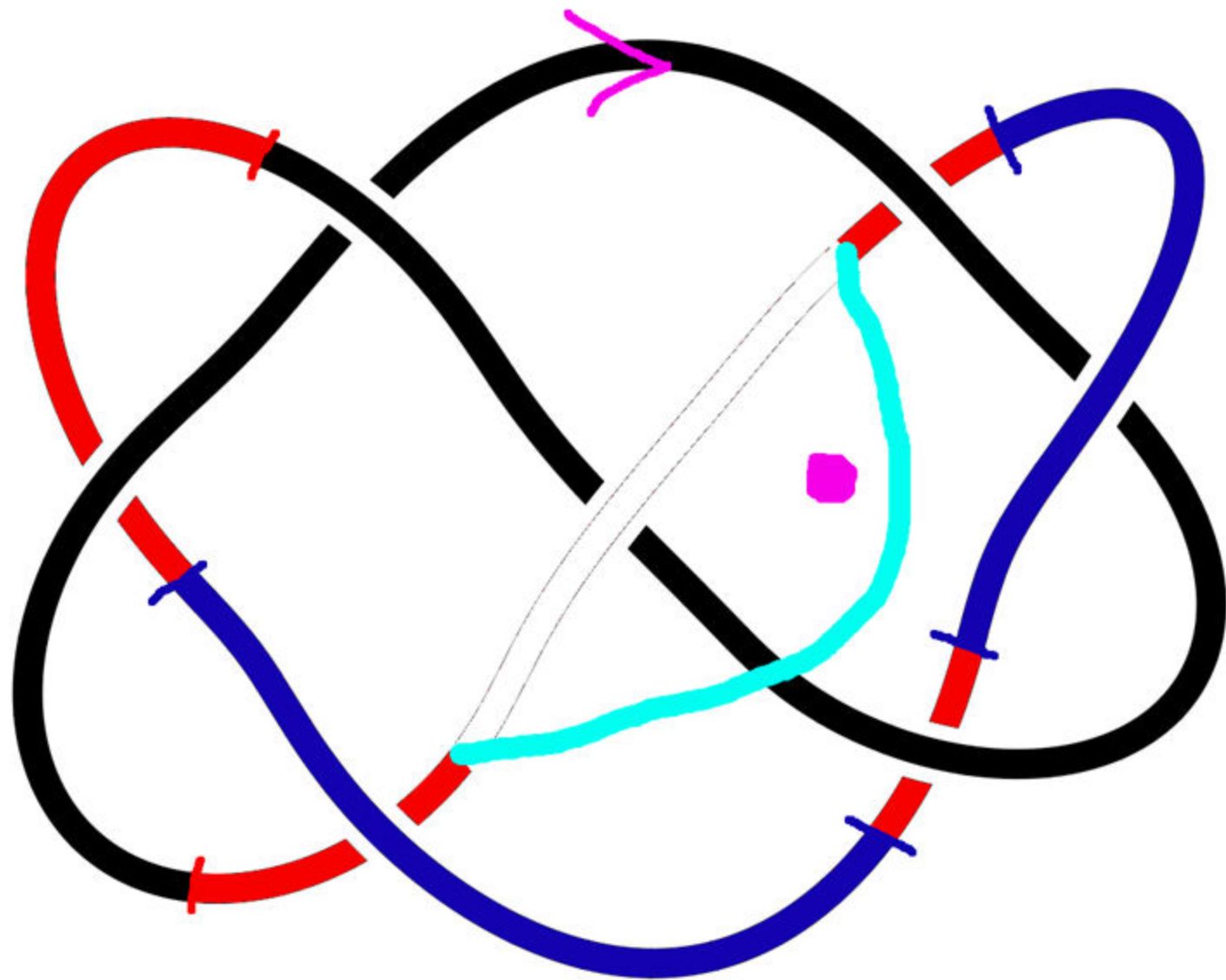
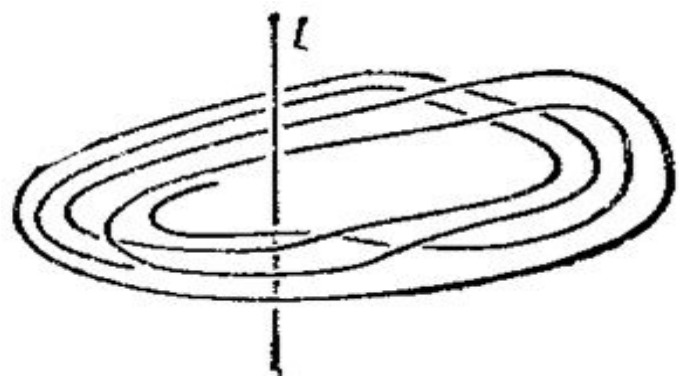
$$-t^4 + t^3 + t$$

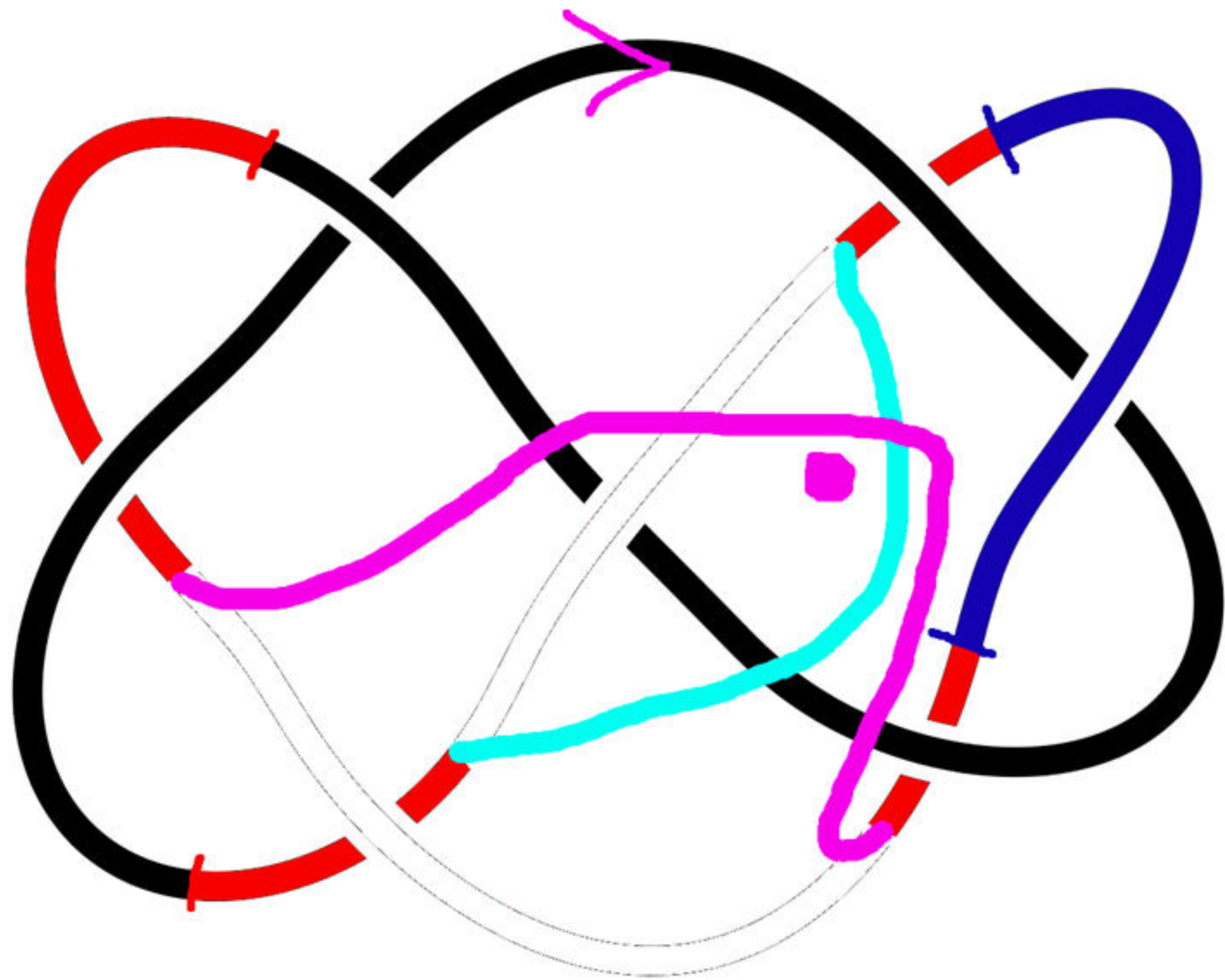
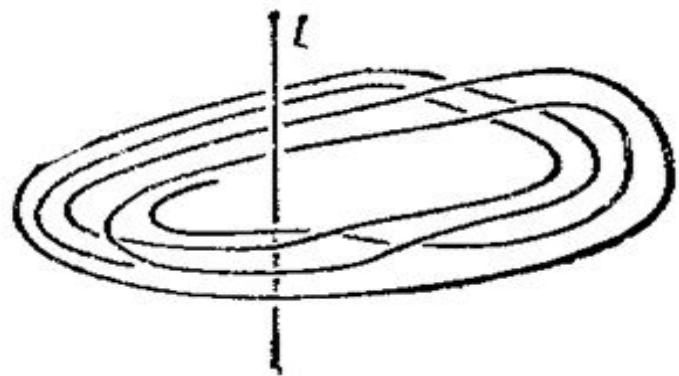


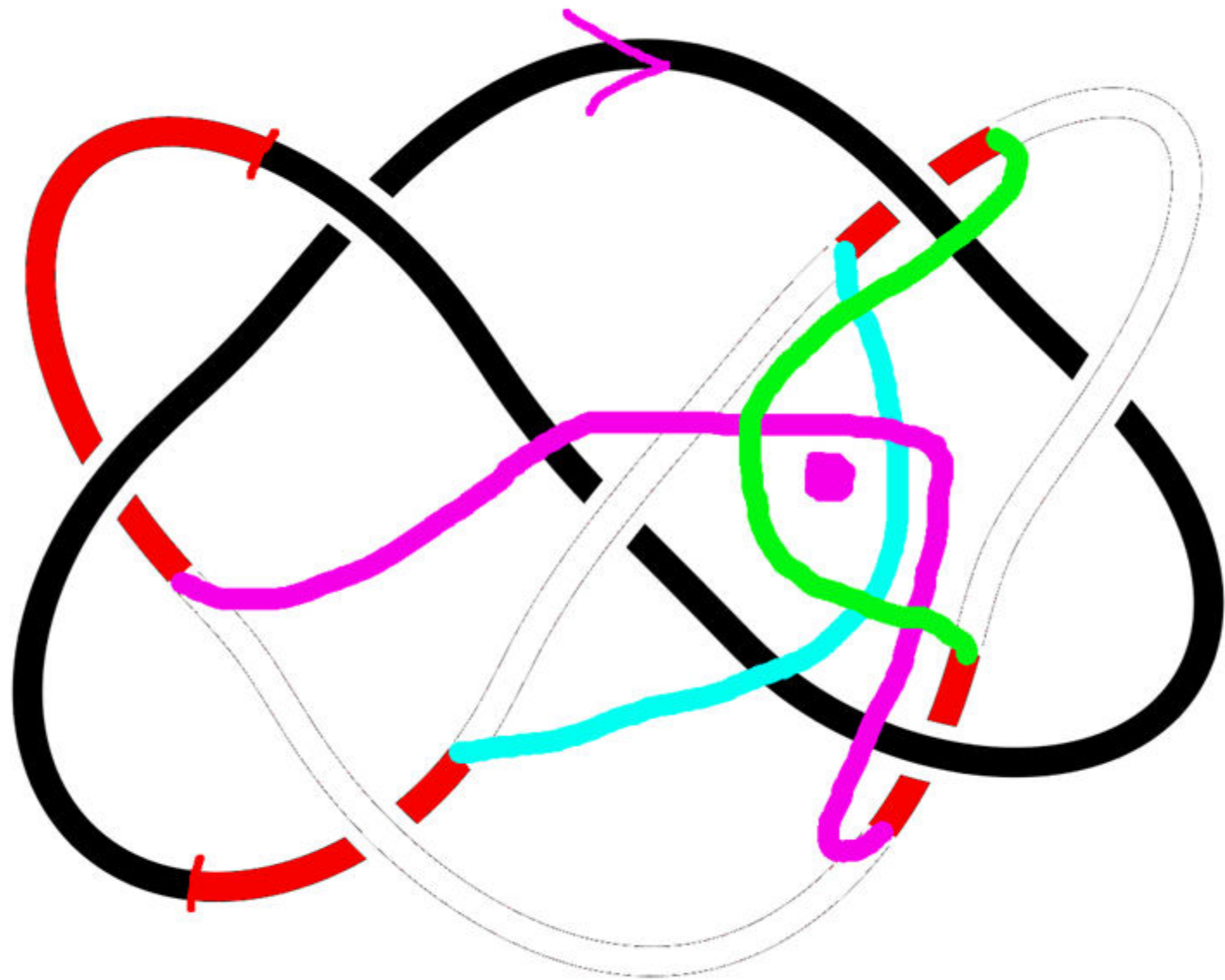
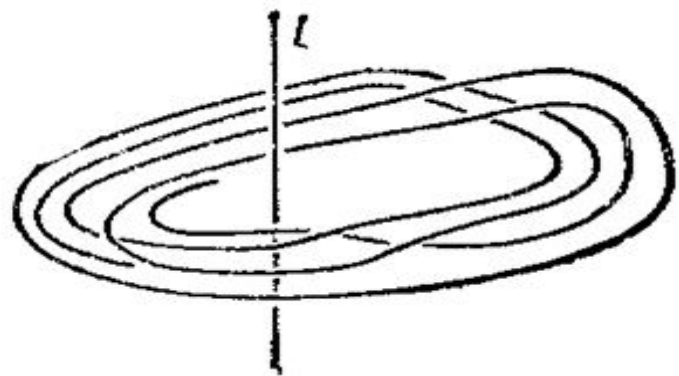


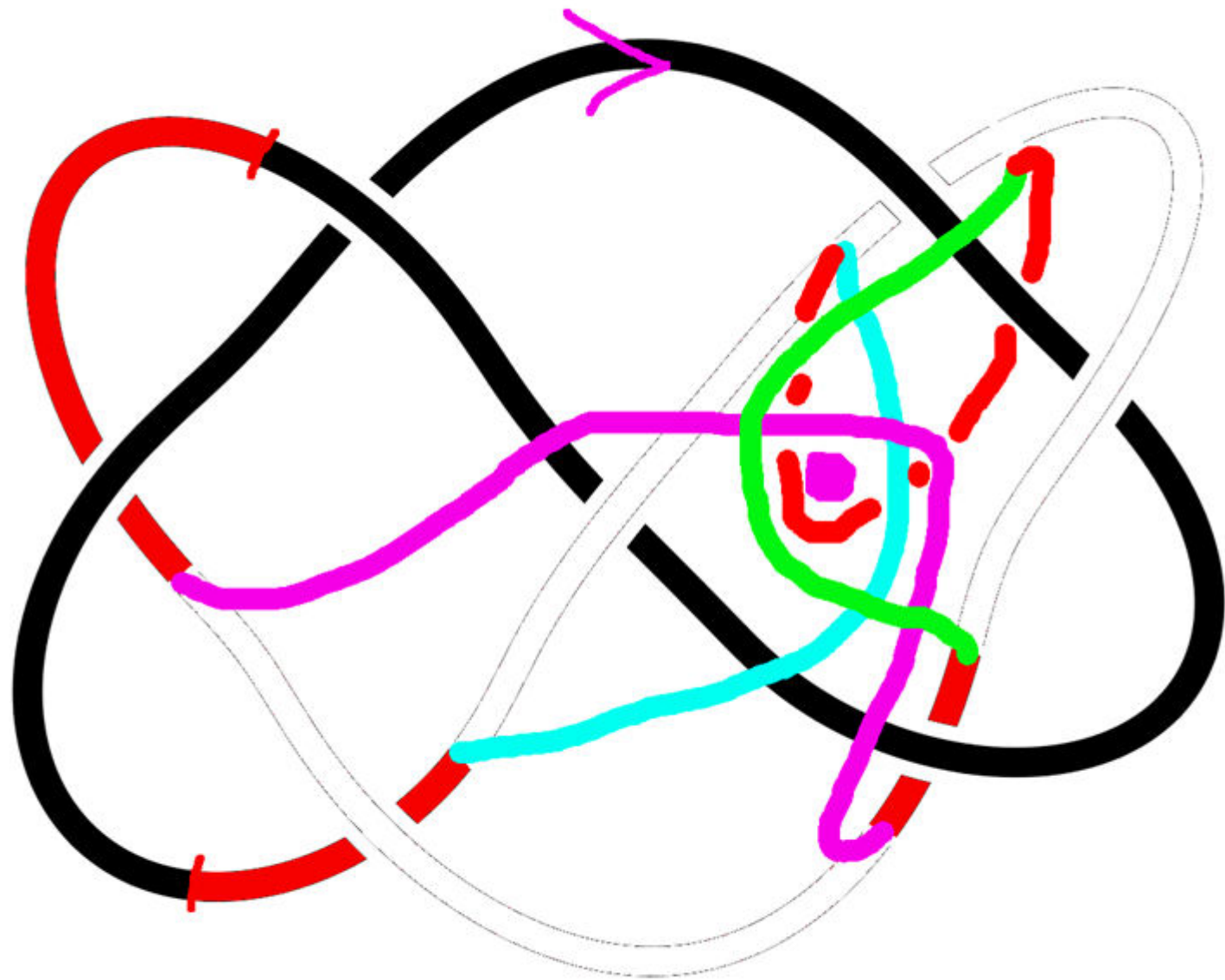
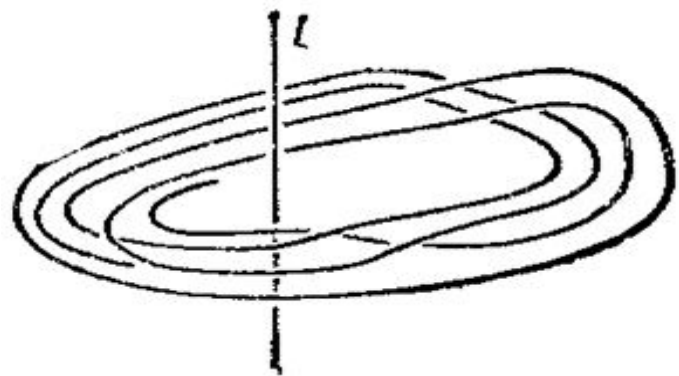


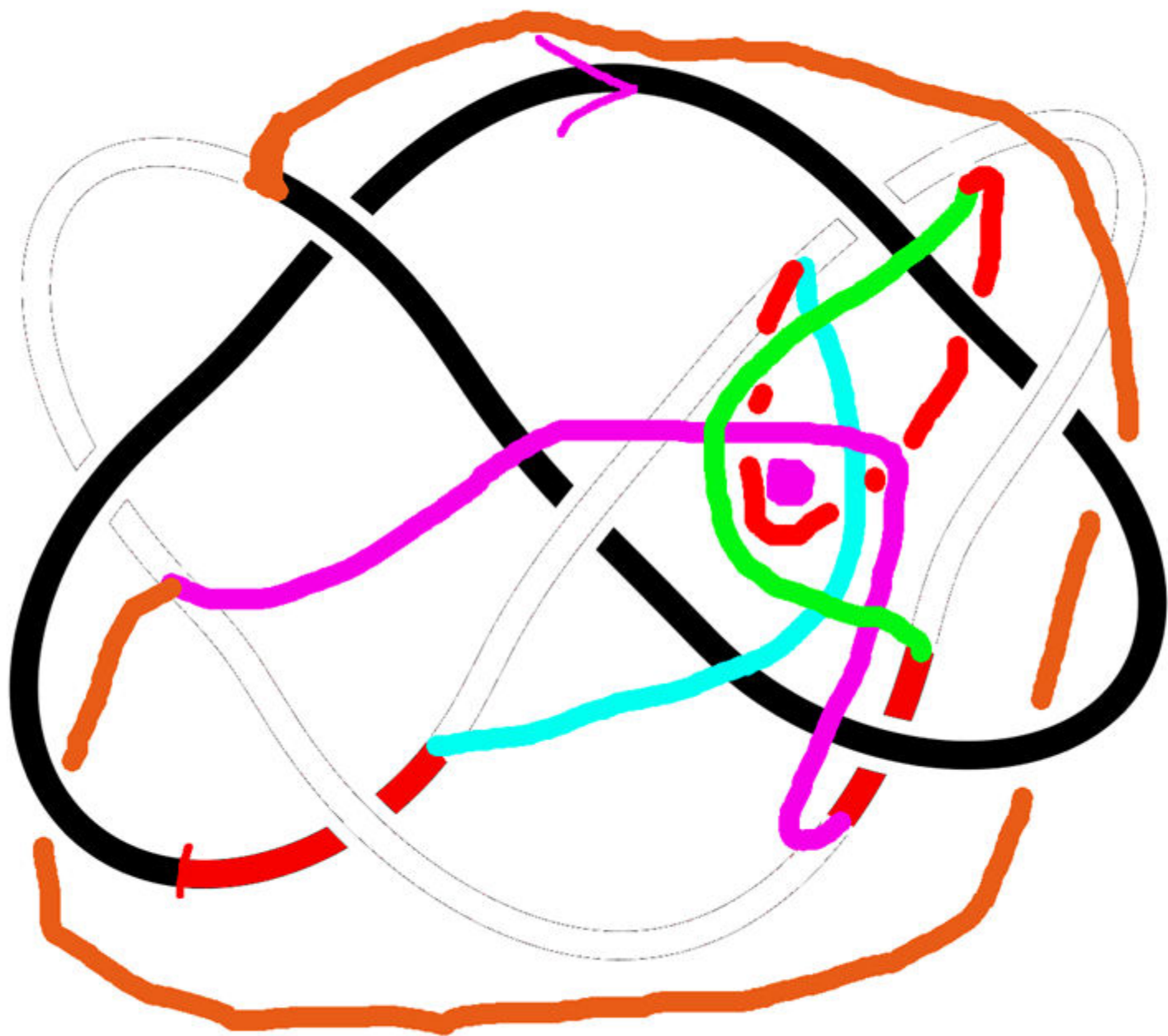
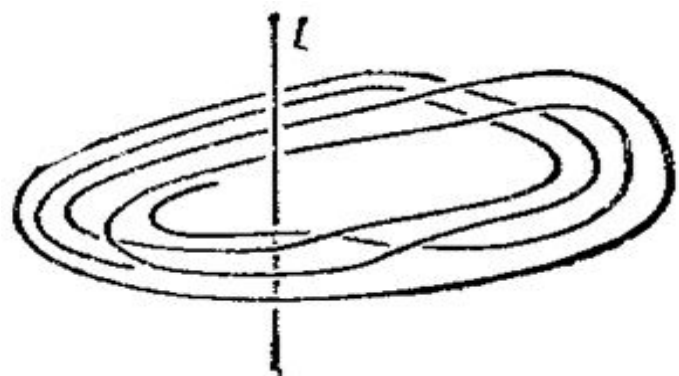


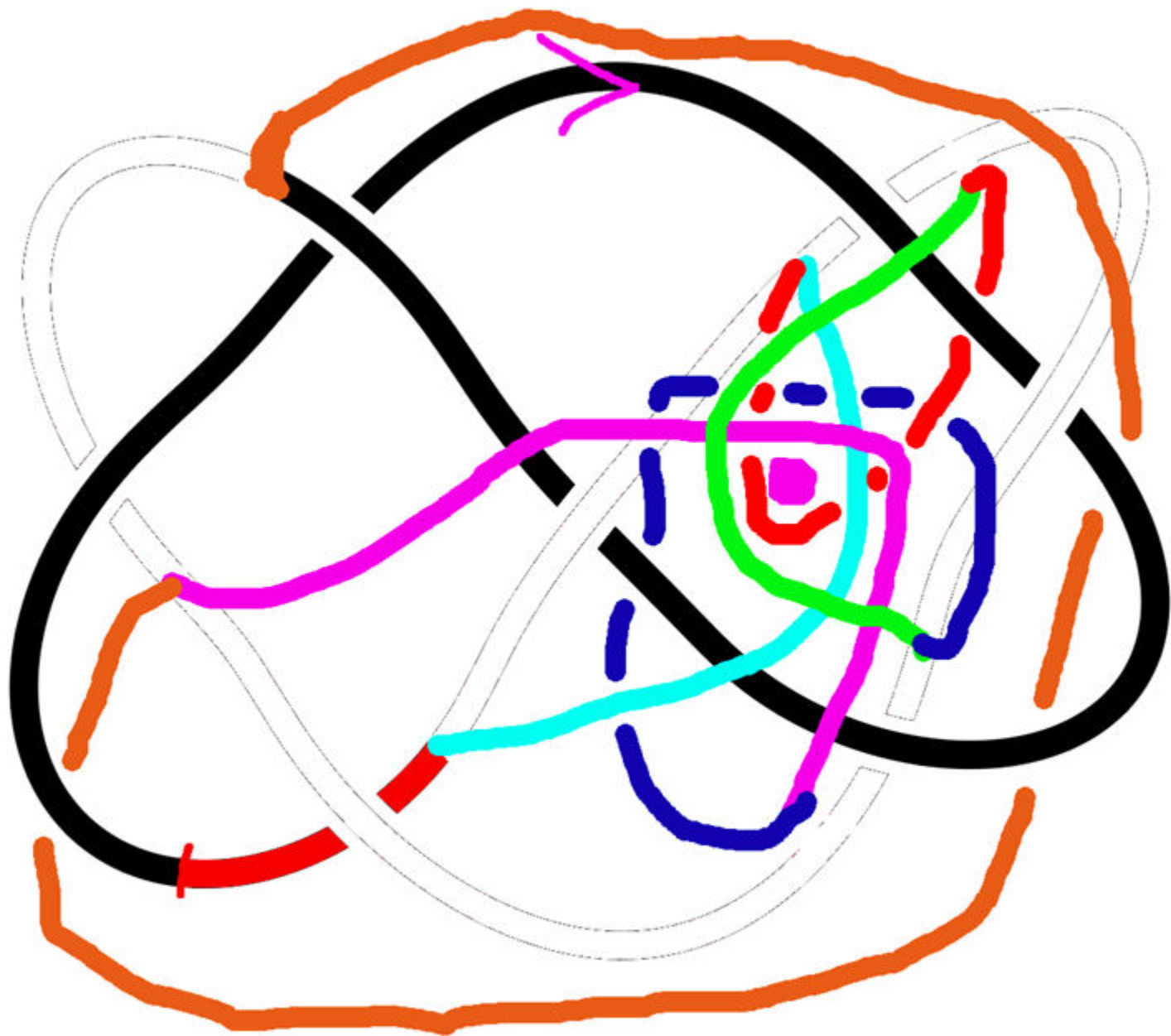
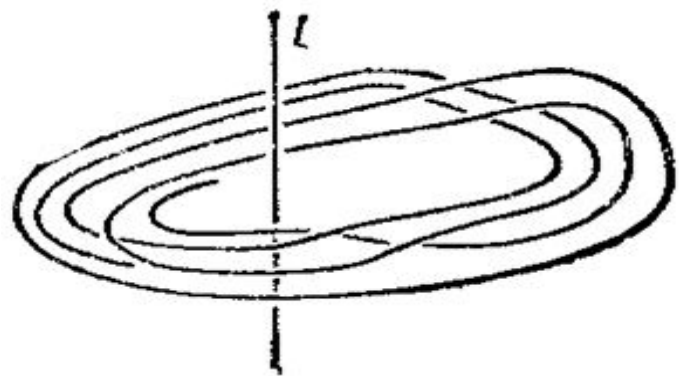


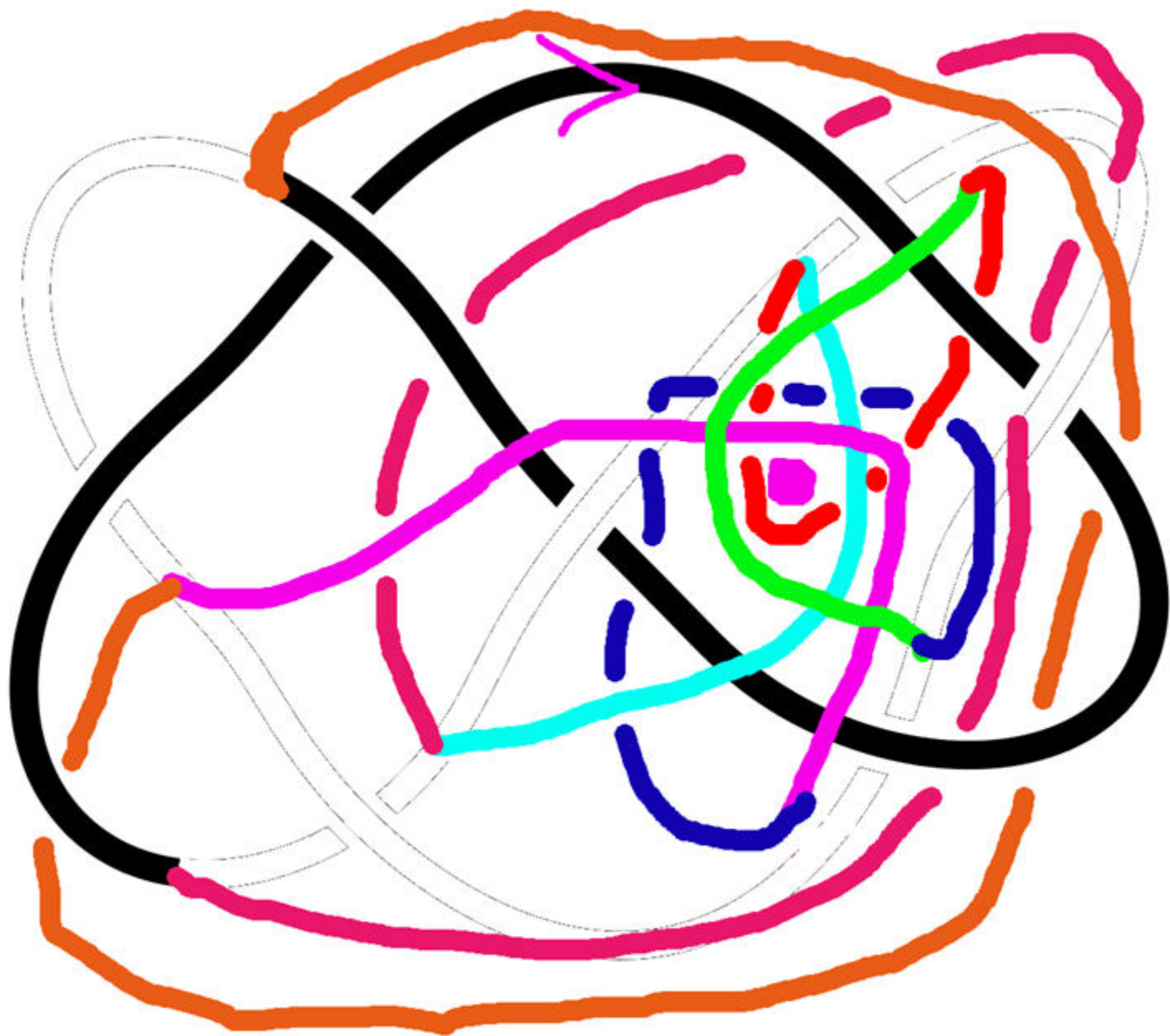
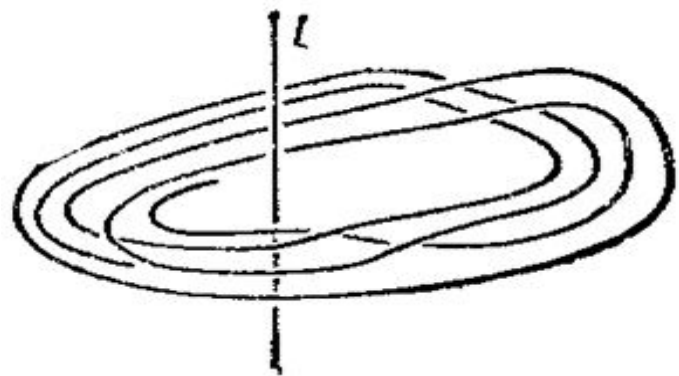




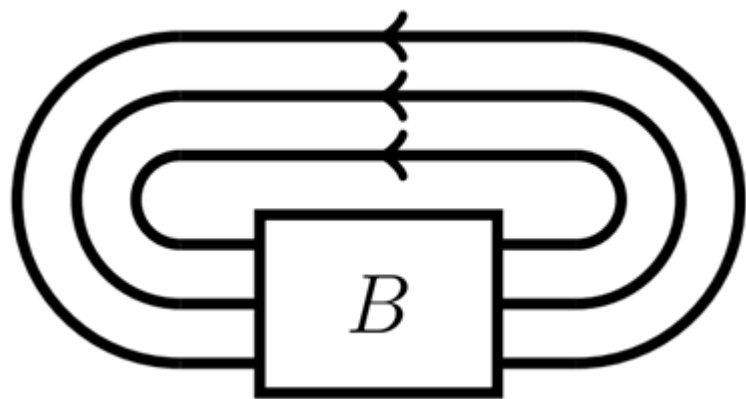
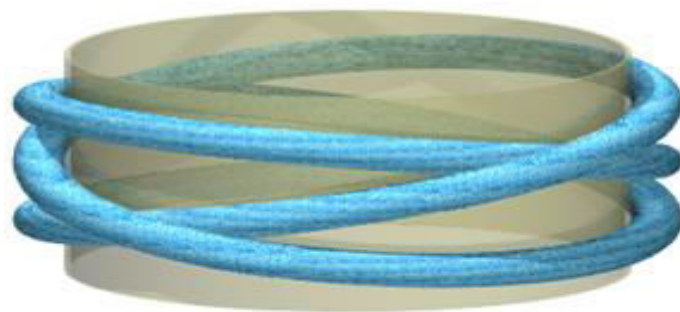
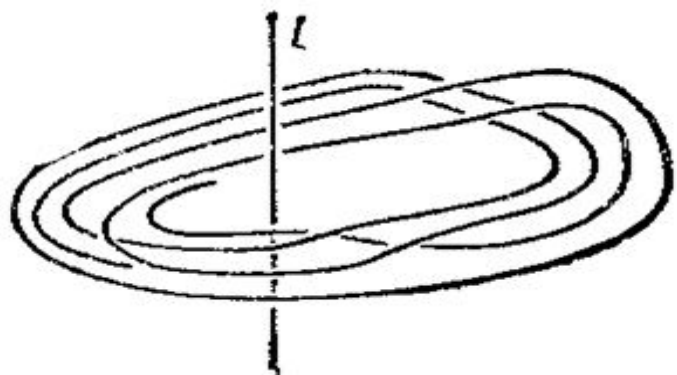




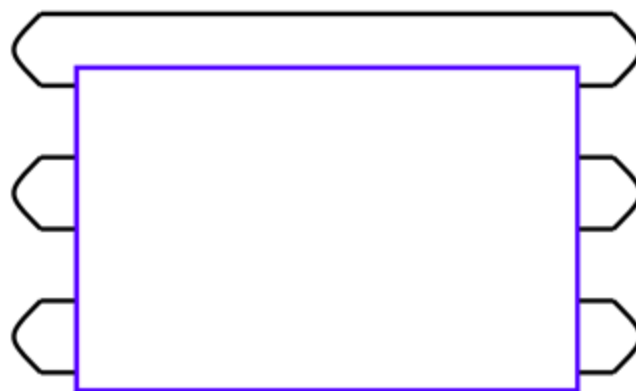




Косообразные представления узлов



Замыкание Александера

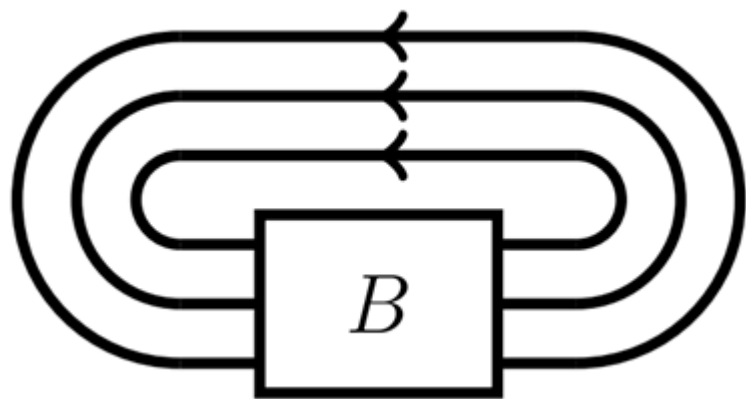
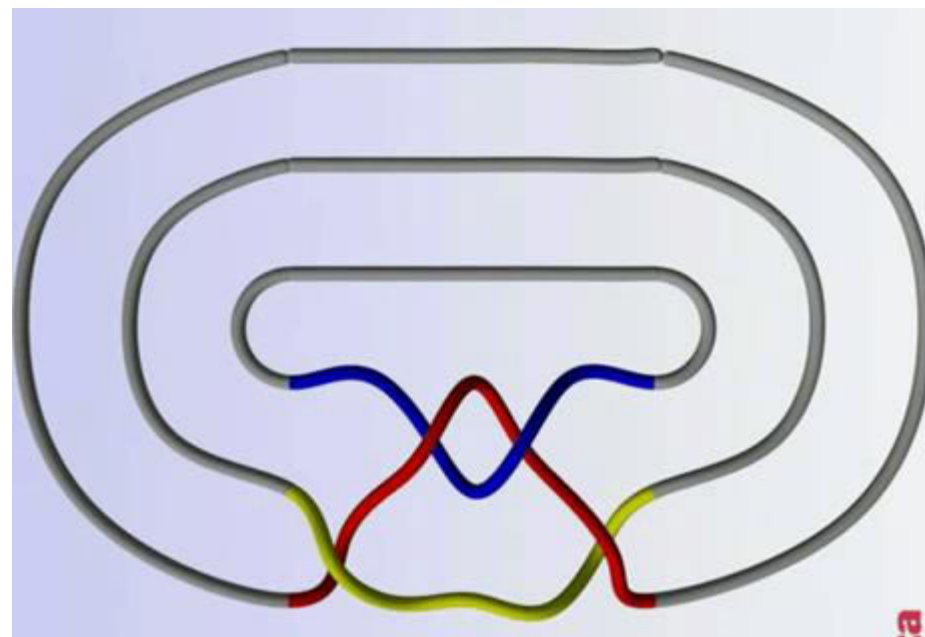
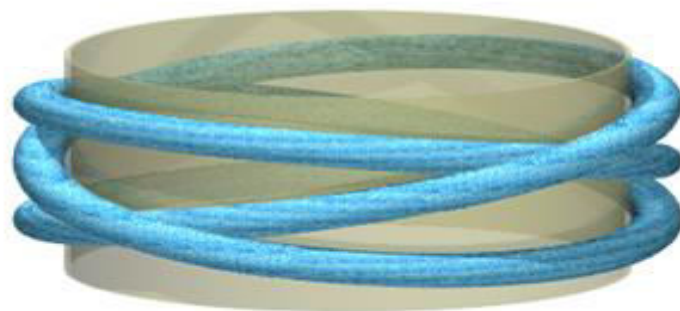
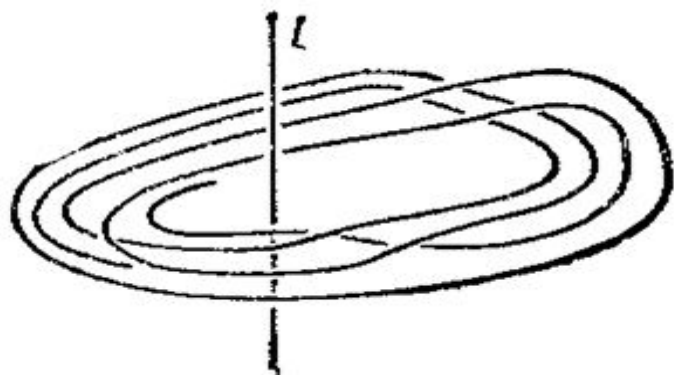


Плетеночное замыкание

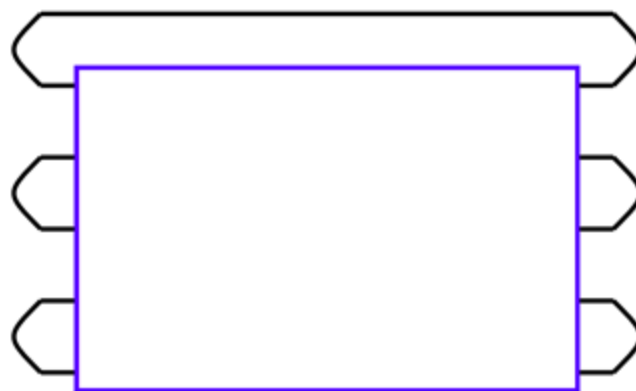


Короткое замыкание

Косообразные представления узлов



Замыкание Александера



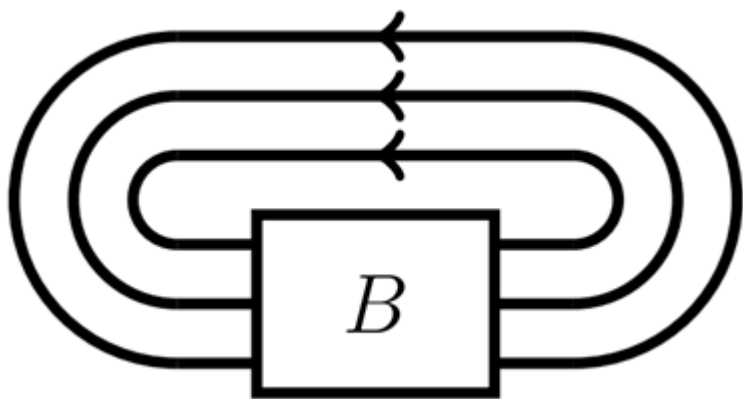
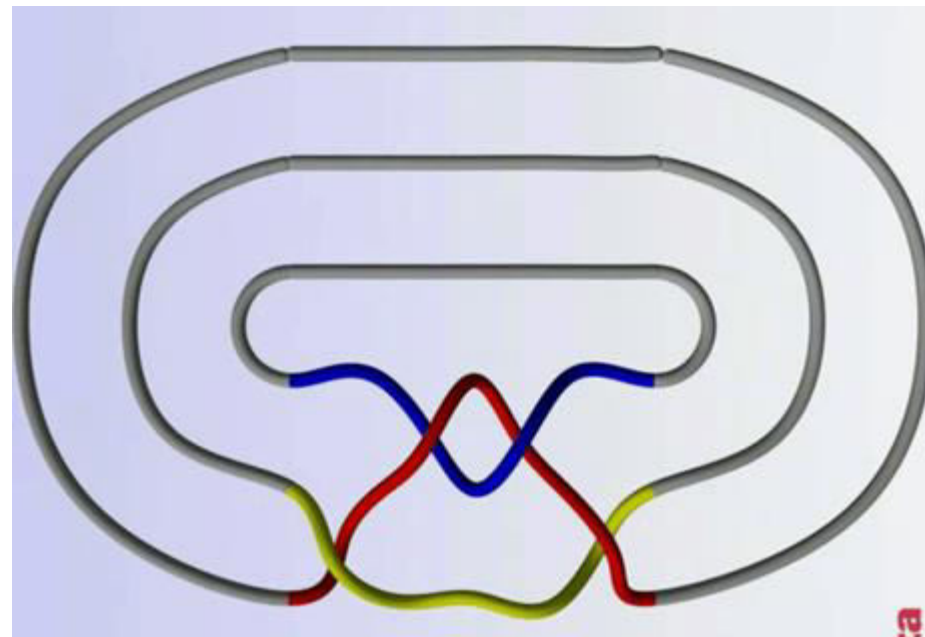
Плетеночное замыкание



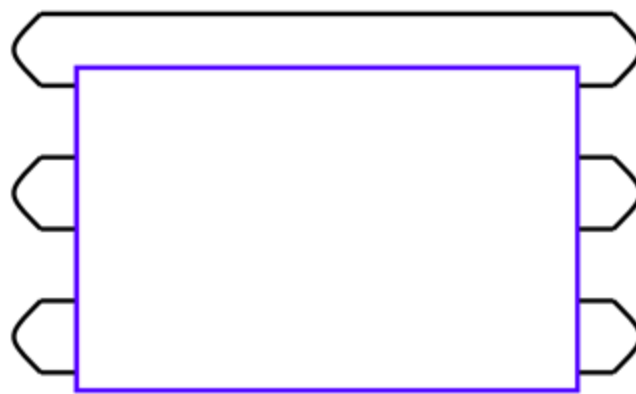
Короткое замыкание

Решите задачу

Докажите, что любое зацепление можно представить в виде короткого замыкания некоторой косы.



Замыкание Александера



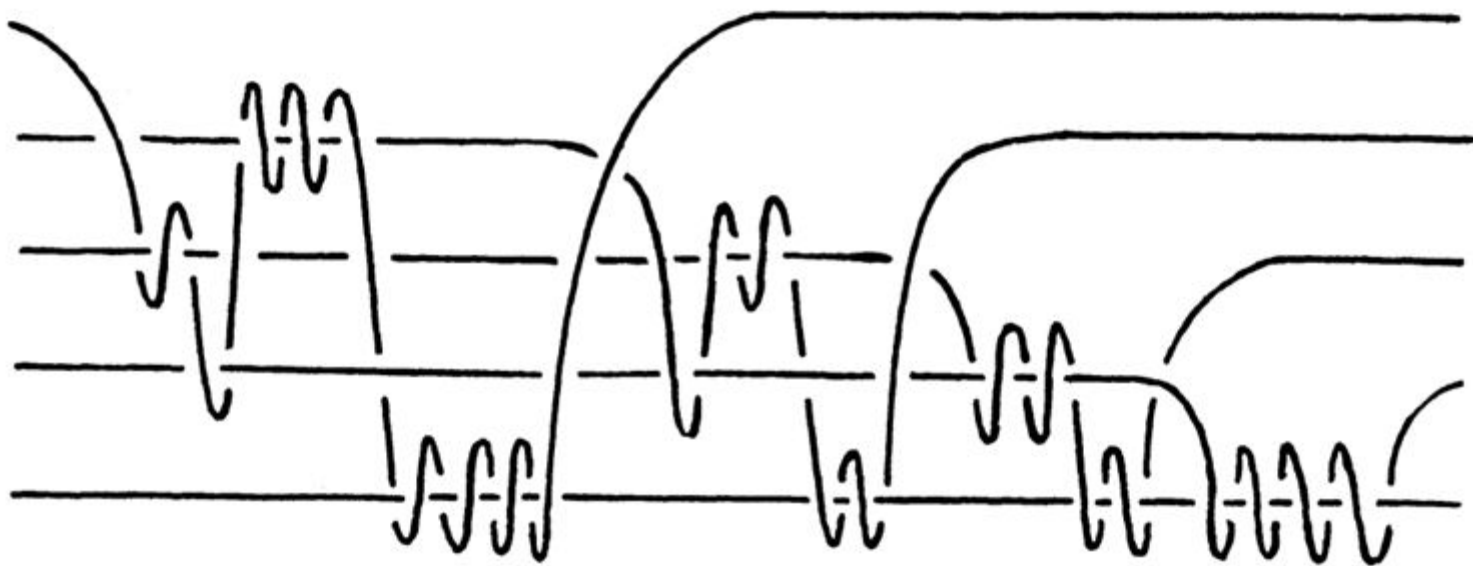
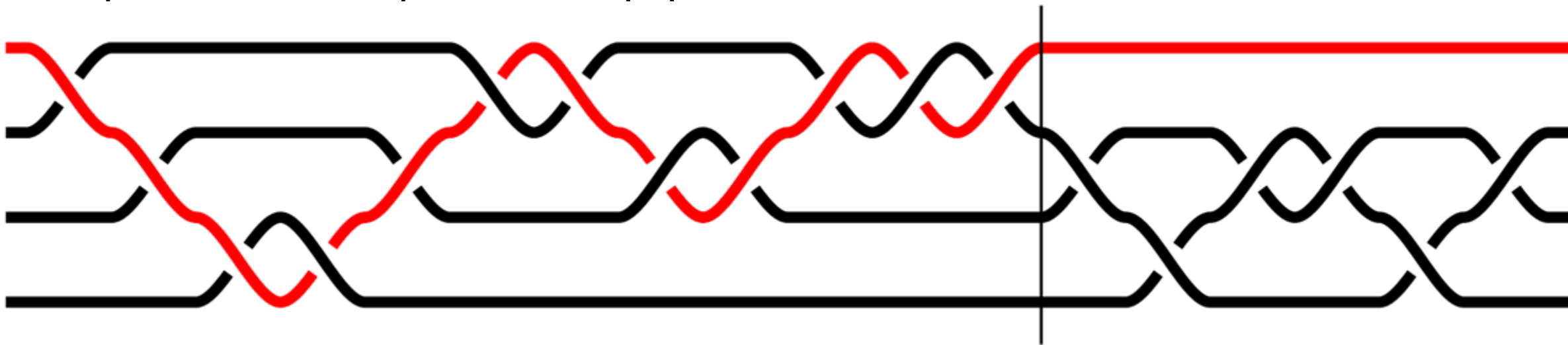
Плетеночное замыкание



Короткое замыкание

Представления кос

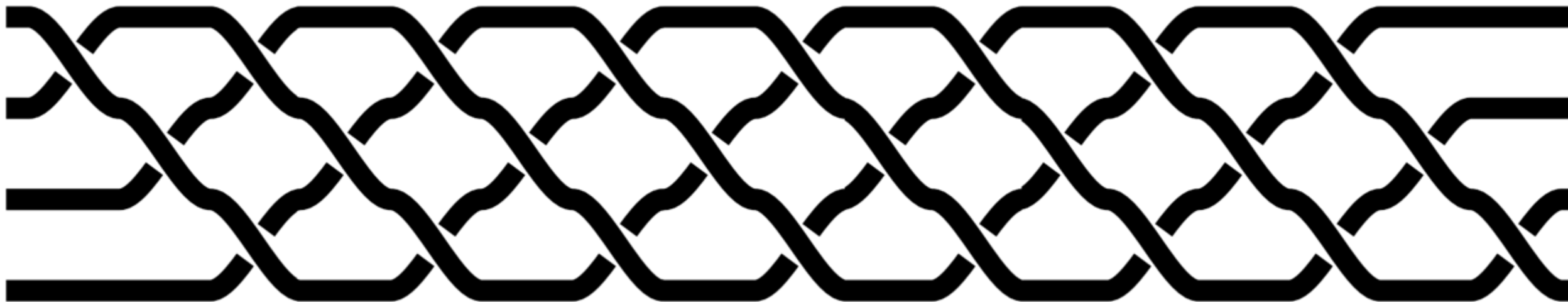
- Причесанная нормальная форма



Короткое замыкание

Представления кос

- Квазиторическое представление



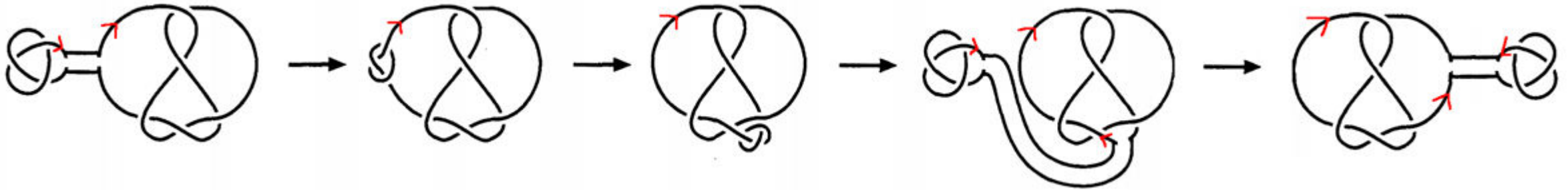
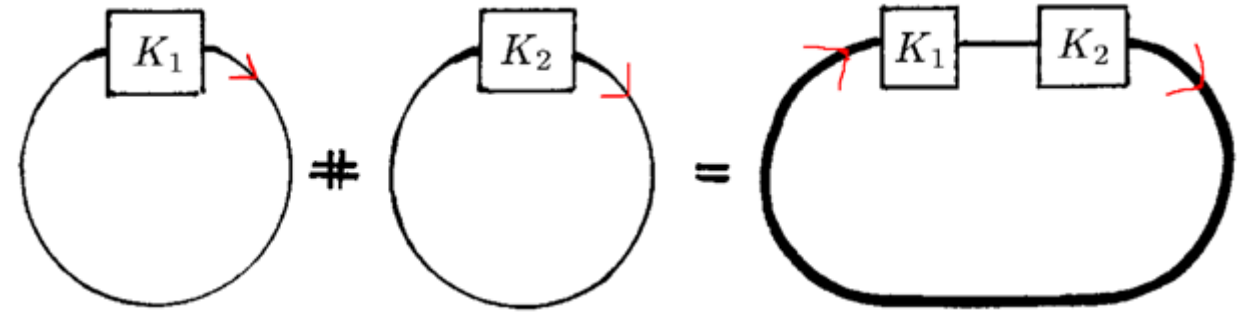
Короткое замыкание

The background of the image is a dense grid of approximately 100 different mathematical knot diagrams. Each diagram is a closed loop or a set of loops intertwined in various ways, representing different topological structures. The knots are rendered in a variety of colors, including red, blue, green, yellow, orange, purple, and pink, which helps to distinguish between different types or components of the knots. The grid is organized into roughly 10 rows and 10 columns, with the central text overlaying the middle portion of the grid.

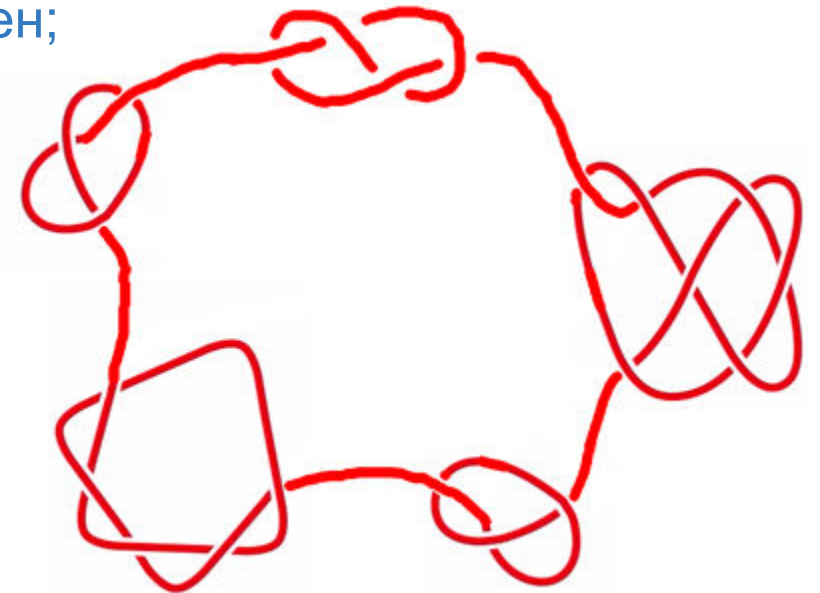
Арифметика узлов

Арифметика узлов

1. Результат не зависит от выбора областей, по которым проходит слияние;
2. Результат не зависит от порядка: $K \# L = L \# K$;

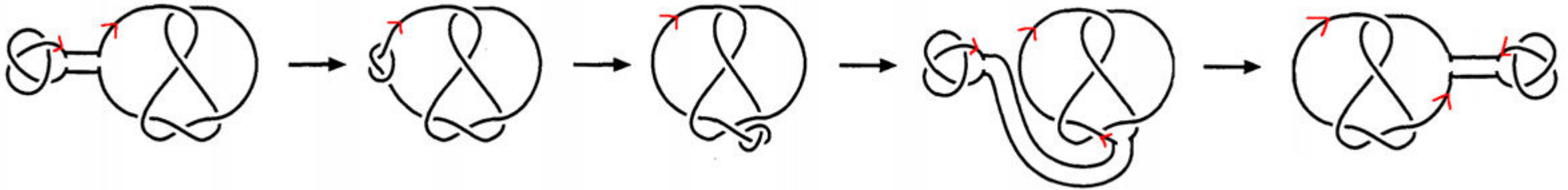
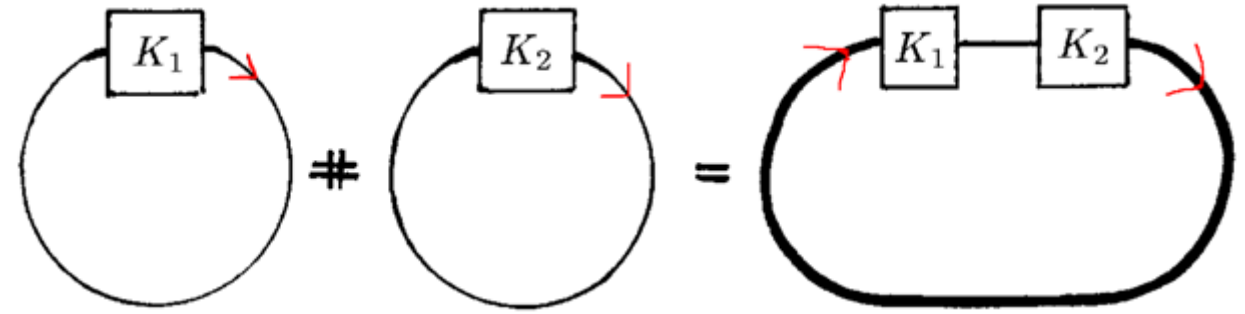


3. Если K и L - нетривиальные узлы, то и узел $K \# L$ нетривиален;
4. Любой узел представляется в виде связной суммы конечного числа простых узлов;
5. Такое представление единственно.

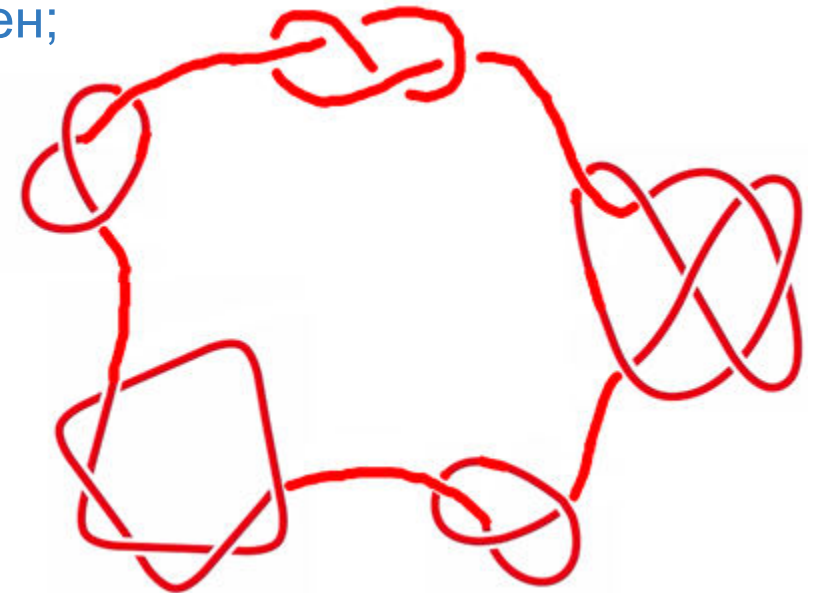
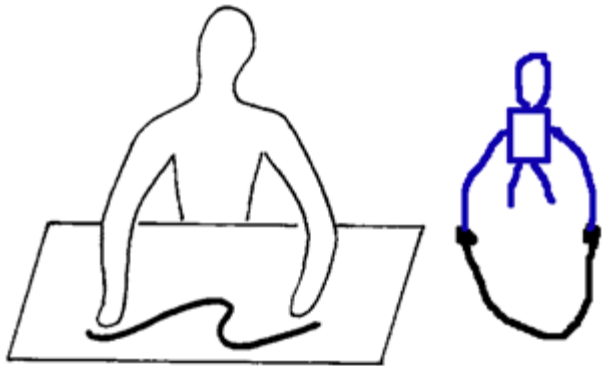


Арифметика узлов

1. Результат не зависит от выбора областей, по которым проходит слияние;
2. Результат не зависит от порядка: $K \# L = L \# K$;

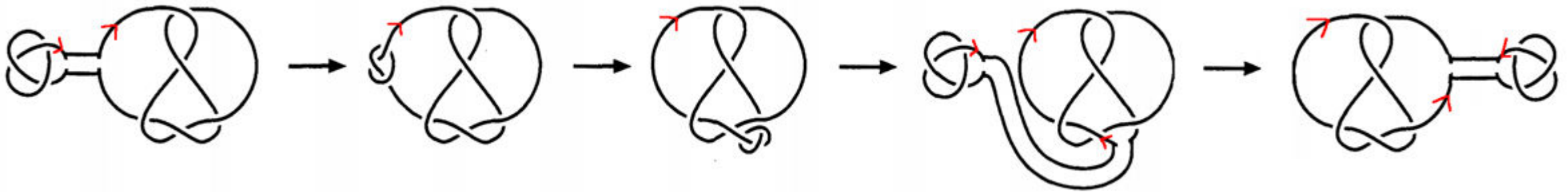
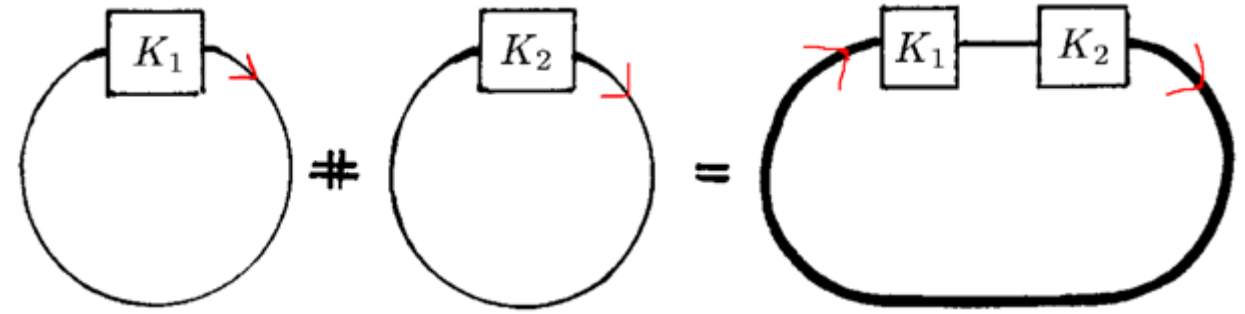


3. Если K и L - нетривиальные узлы, то и узел $K \# L$ нетривиален;
4. Любой узел представляется в виде связной суммы конечного числа простых узлов;
5. Такое представление единственно.

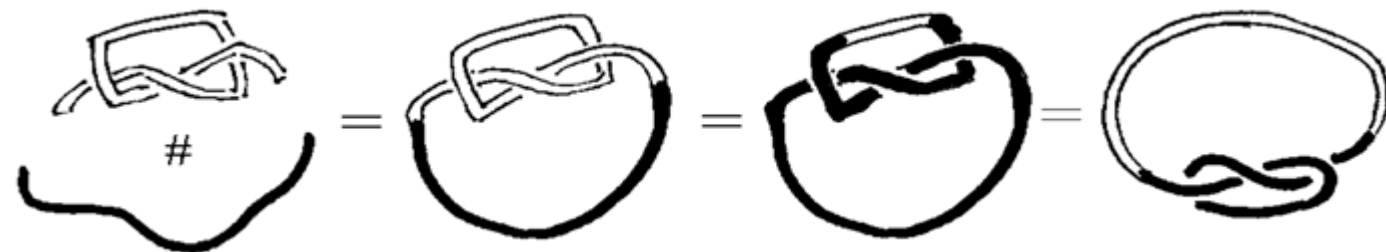
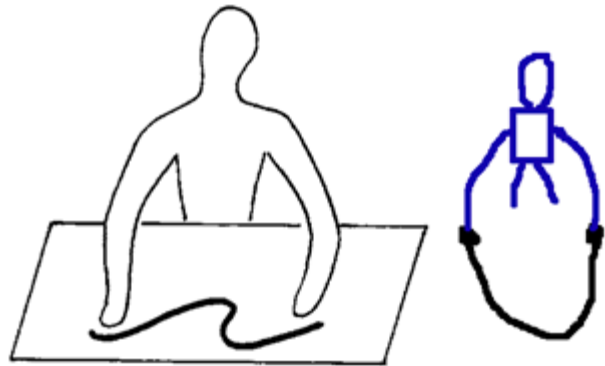


Арифметика узлов

1. Результат не зависит от выбора областей, по которым проходит слияние;
2. Результат не зависит от порядка: $K \# L = L \# K$;

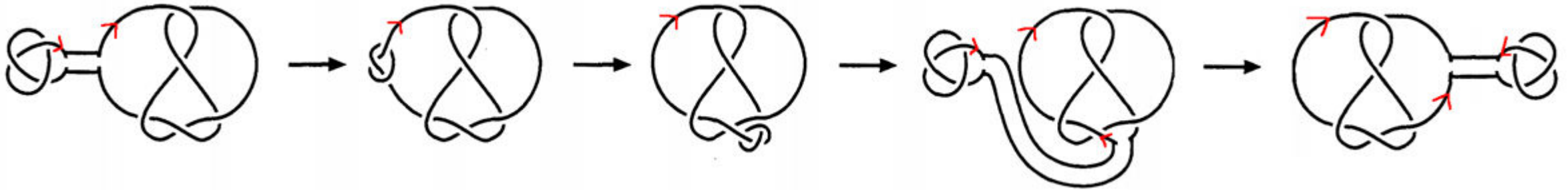
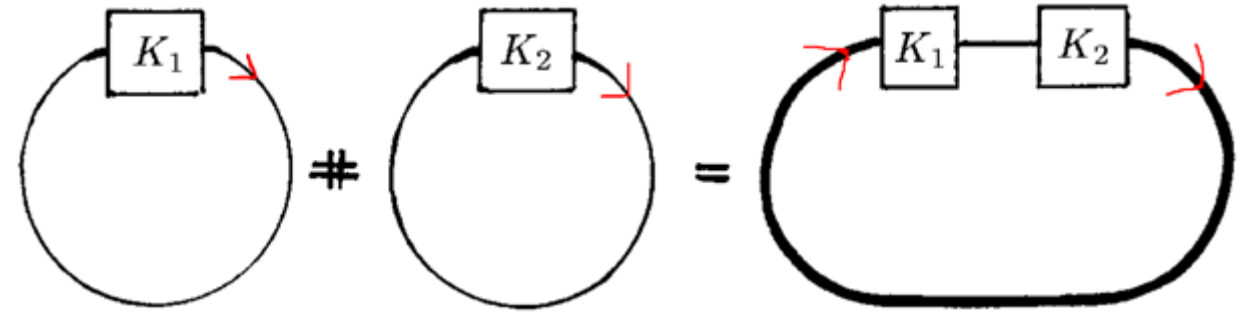


3. Если K и L - нетривиальные узлы, то и узел $K \# L$ нетривиален;
4. Любой узел представляется в виде связной суммы конечного числа простых узлов;
5. Такое представление единственно.

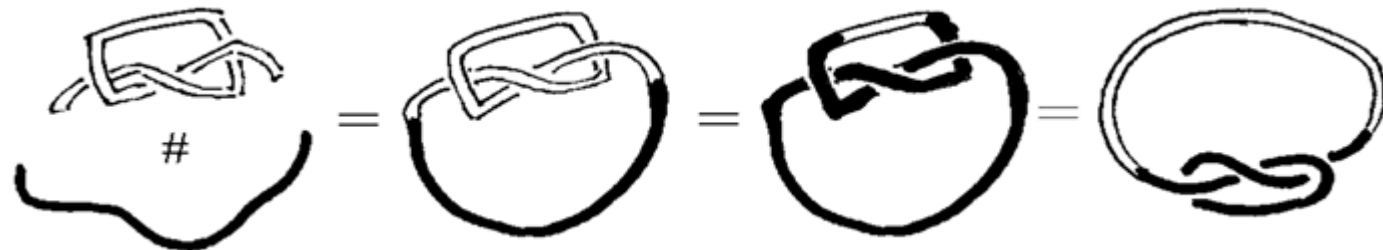
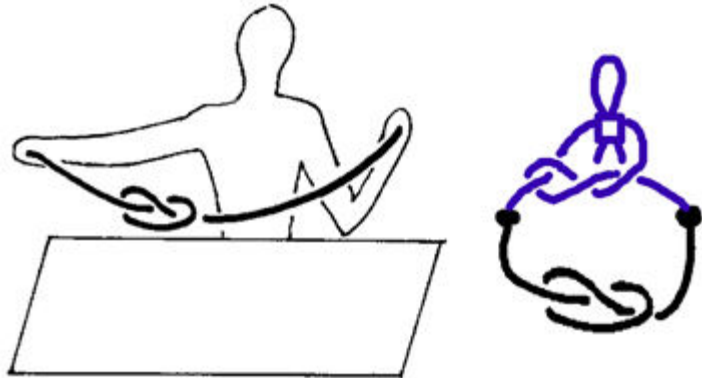


Арифметика узлов

1. Результат не зависит от выбора областей, по которым проходит слияние;
2. Результат не зависит от порядка: $K \# L = L \# K$;

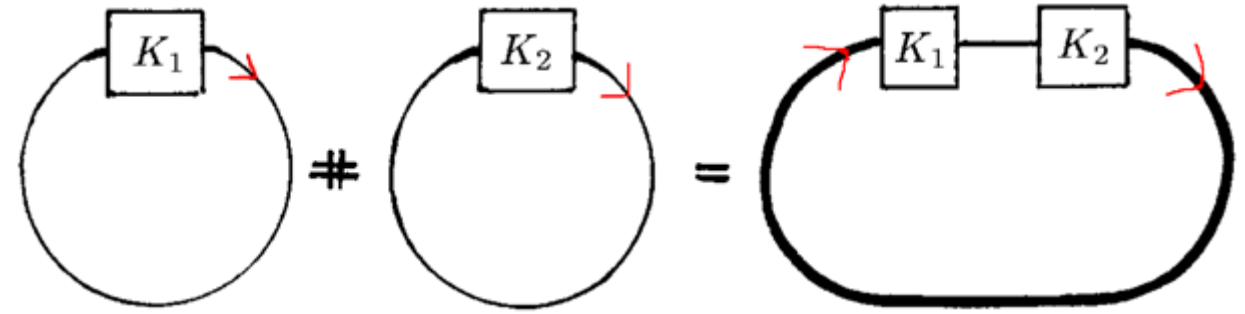


3. Если K и L - нетривиальные узлы, то и узел $K \# L$ нетривиален;
4. Любой узел представляется в виде связной суммы конечного числа простых узлов;
5. Такое представление единственно.



Арифметика узлов

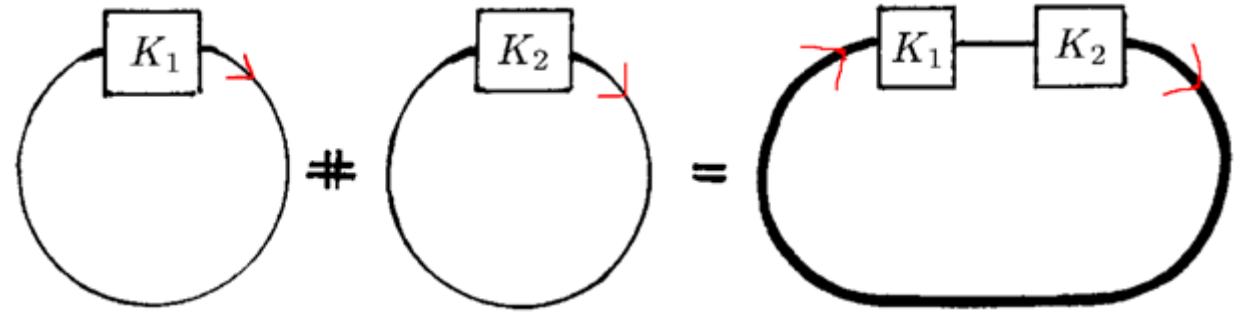
1. Результат не зависит от выбора областей, по которым проходит слияние;
2. Результат не зависит от порядка: $K \# L = L \# K$;
3. Если K и L - нетривиальные узлы, то и узел $K \# L$ нетривиален;
4. Любой узел представляется в виде связной суммы конечного числа простых узлов;
5. Такое представление единственно.



Теорема. Любая биекция из множества простых узлов в множество простых чисел продолжается до **изоморфизма** из моноида простых узлов в моноид натуральных чисел.

Арифметика узлов

1. Результат не зависит от выбора областей, по которым проходит слияние;
2. Результат не зависит от порядка: $K \# L = L \# K$;
3. Если K и L - нетривиальные узлы, то и узел $K \# L$ нетривиален;
4. Любой узел представляется в виде связной суммы конечного числа простых узлов;
5. Такое представление единственно.

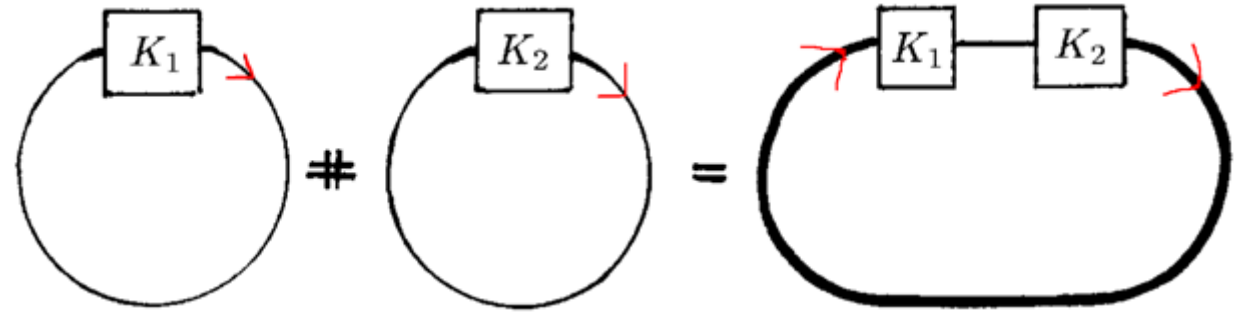


Теорема. Любая биекция из множества простых узлов в множество простых чисел продолжается до **изоморфизма** из моноида простых узлов в моноид натуральных чисел.

- А чему в теории чисел соответствуют зацепления?

Арифметика узлов

1. Результат не зависит от выбора областей, по которым проходит слияние;
2. Результат не зависит от порядка: $K \# L = L \# K$;
3. Если K и L - нетривиальные узлы, то и узел $K \# L$ нетривиален;
4. Любой узел представляется в виде связной суммы конечного числа простых узлов;
5. Такое представление единственно.

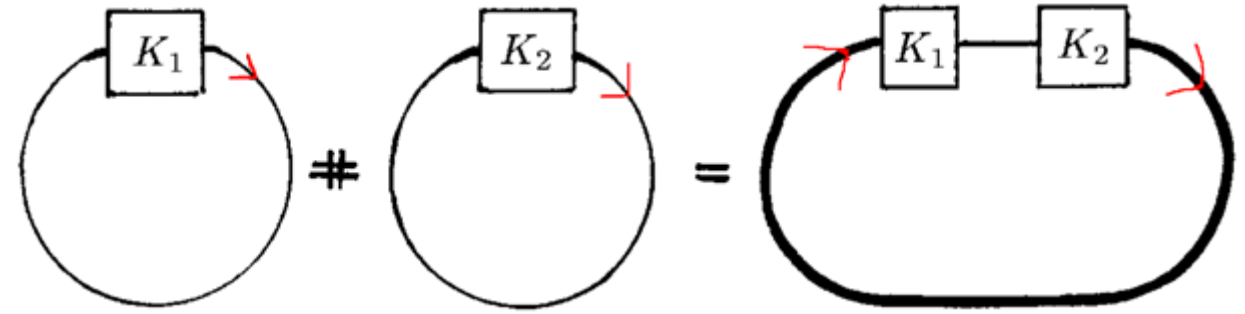


Теорема. Любая биекция из множества простых узлов в множество простых чисел продолжается до **изоморфизма** из моноида простых узлов в моноид натуральных чисел.

- А чему в теории чисел соответствуют зацепления?
- **Коэффициент зацепления компонент** двухкомпонентного зацепления соответствует **символу Лежандра**;

Арифметика узлов

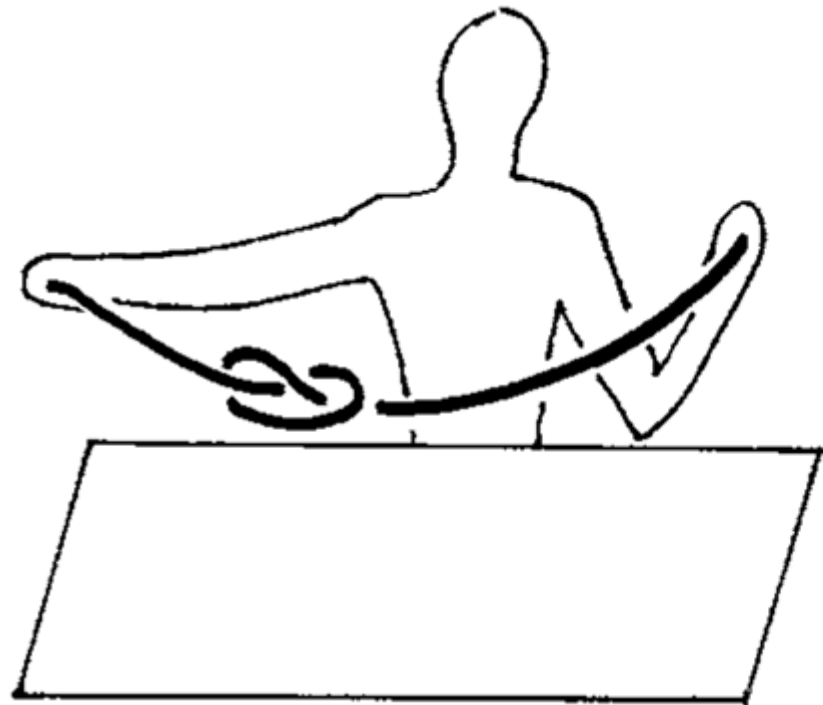
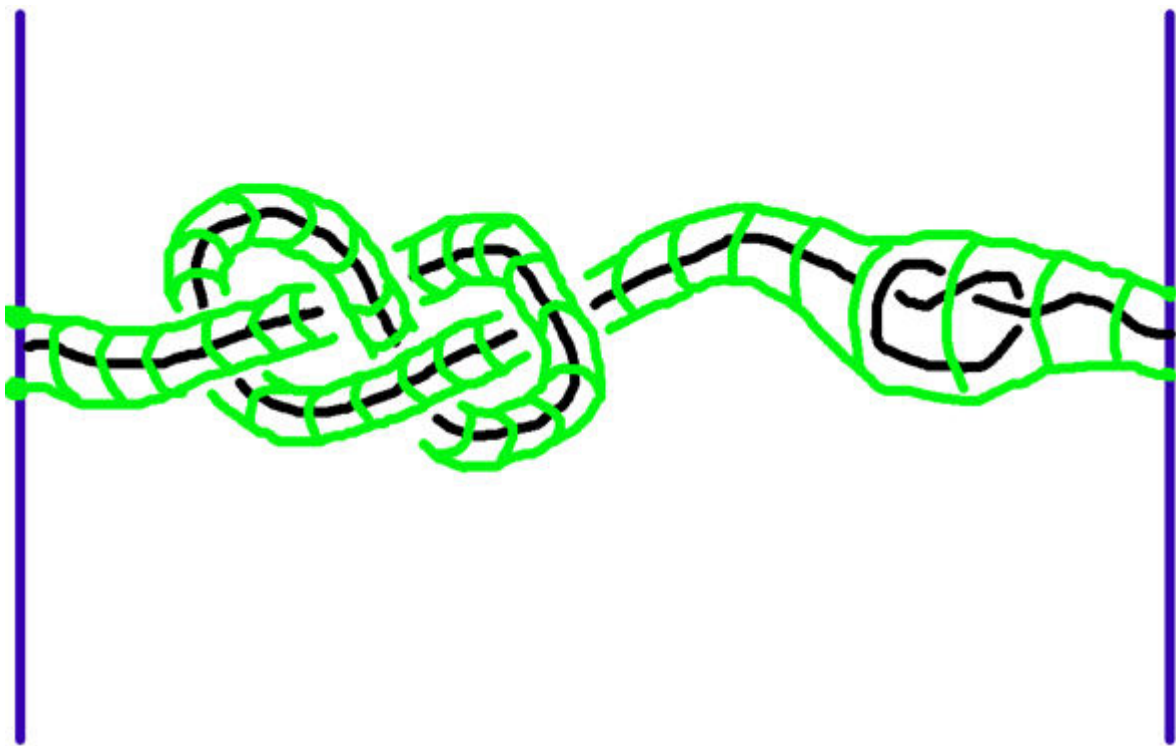
1. Результат не зависит от выбора областей, по которым проходит слияние;
2. Результат не зависит от порядка: $K \# L = L \# K$;
3. Если K и L - нетривиальные узлы, то и узел $K \# L$ нетривиален;
4. Любой узел представляется в виде связной суммы конечного числа простых узлов;
5. Такое представление единственно.



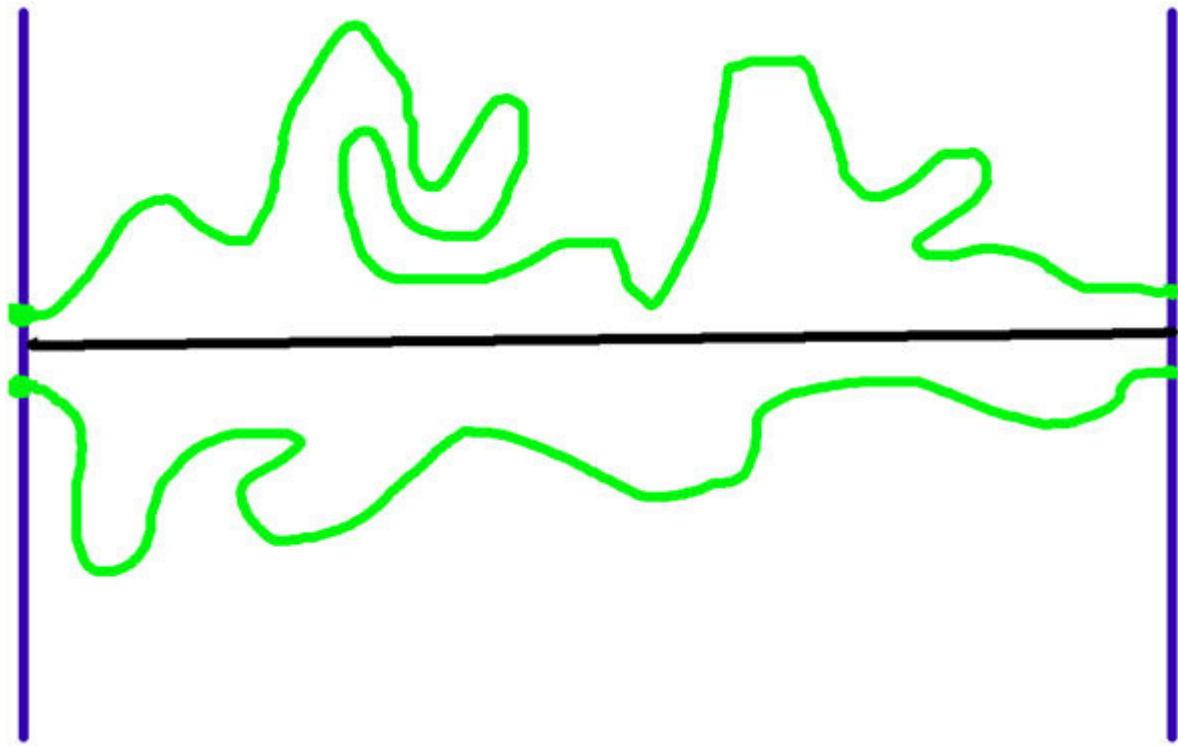
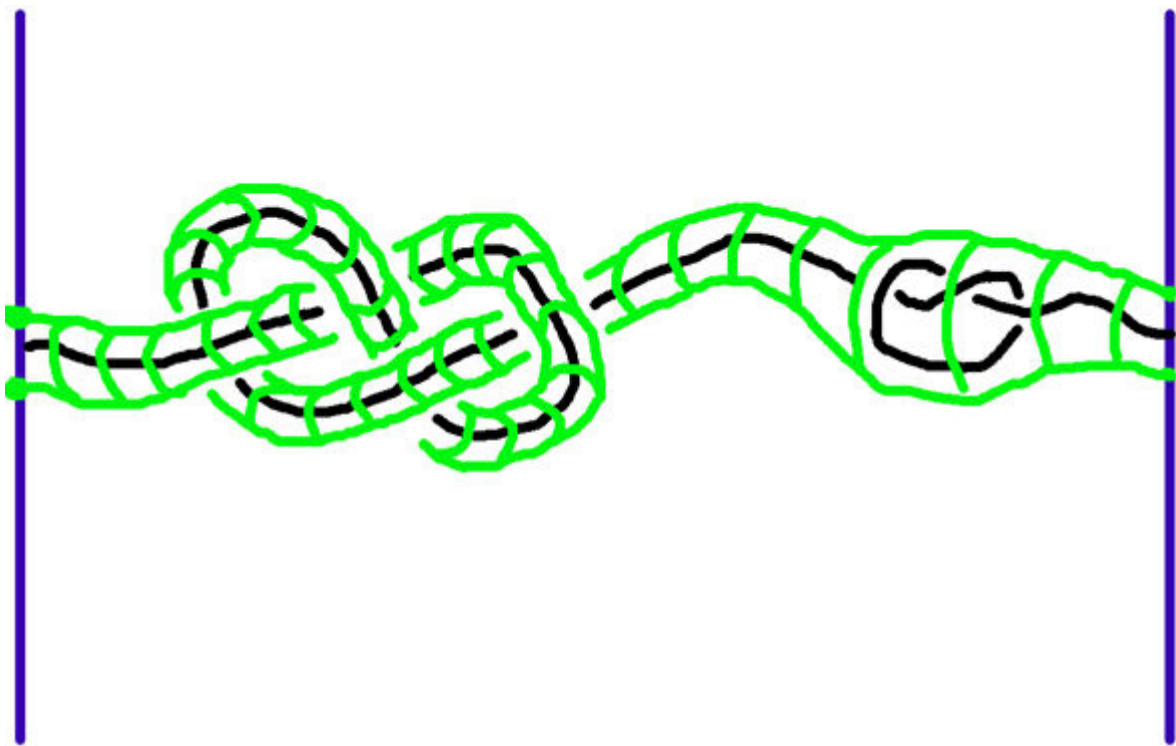
Теорема. Любая биекция из множества простых узлов в множество простых чисел продолжается до **изоморфизма** из моноида простых узлов в моноид натуральных чисел.

- А чему в теории чисел соответствуют зацепления?
- **Коэффициент зацепления компонент** двухкомпонентного зацепления соответствует **символу Лежандра**;
- **Трехмерные многообразия** соответствуют **числовым полям**.

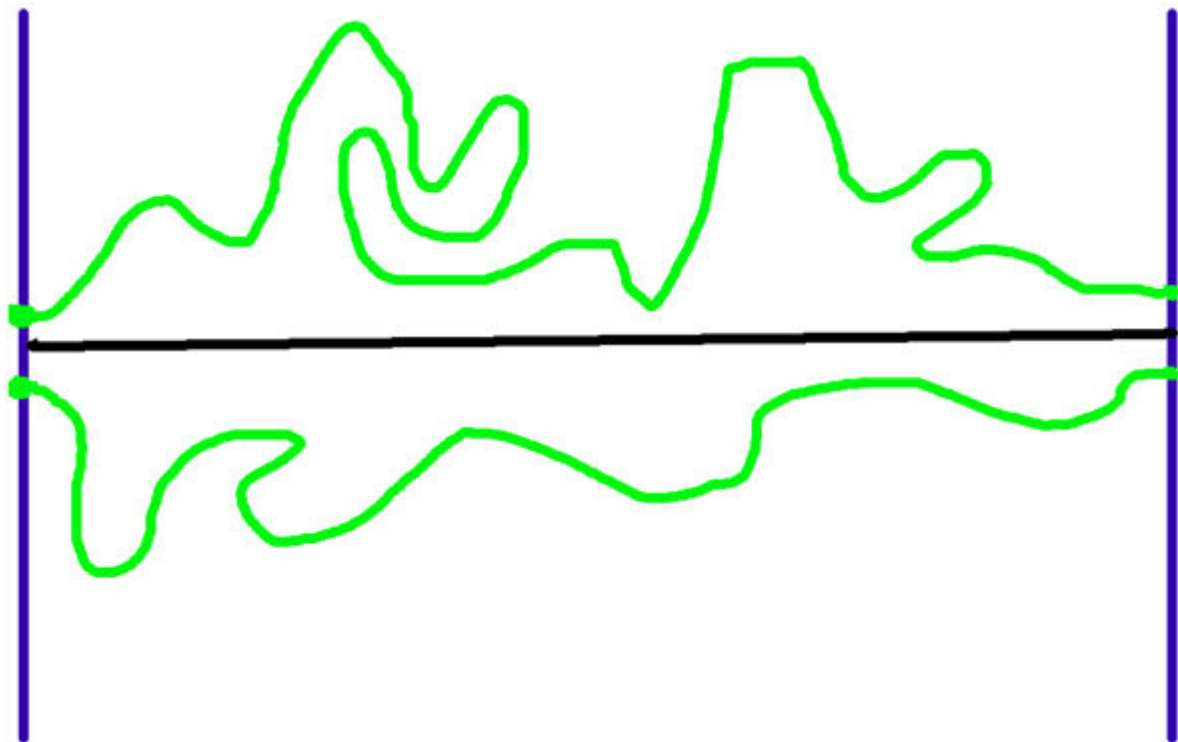
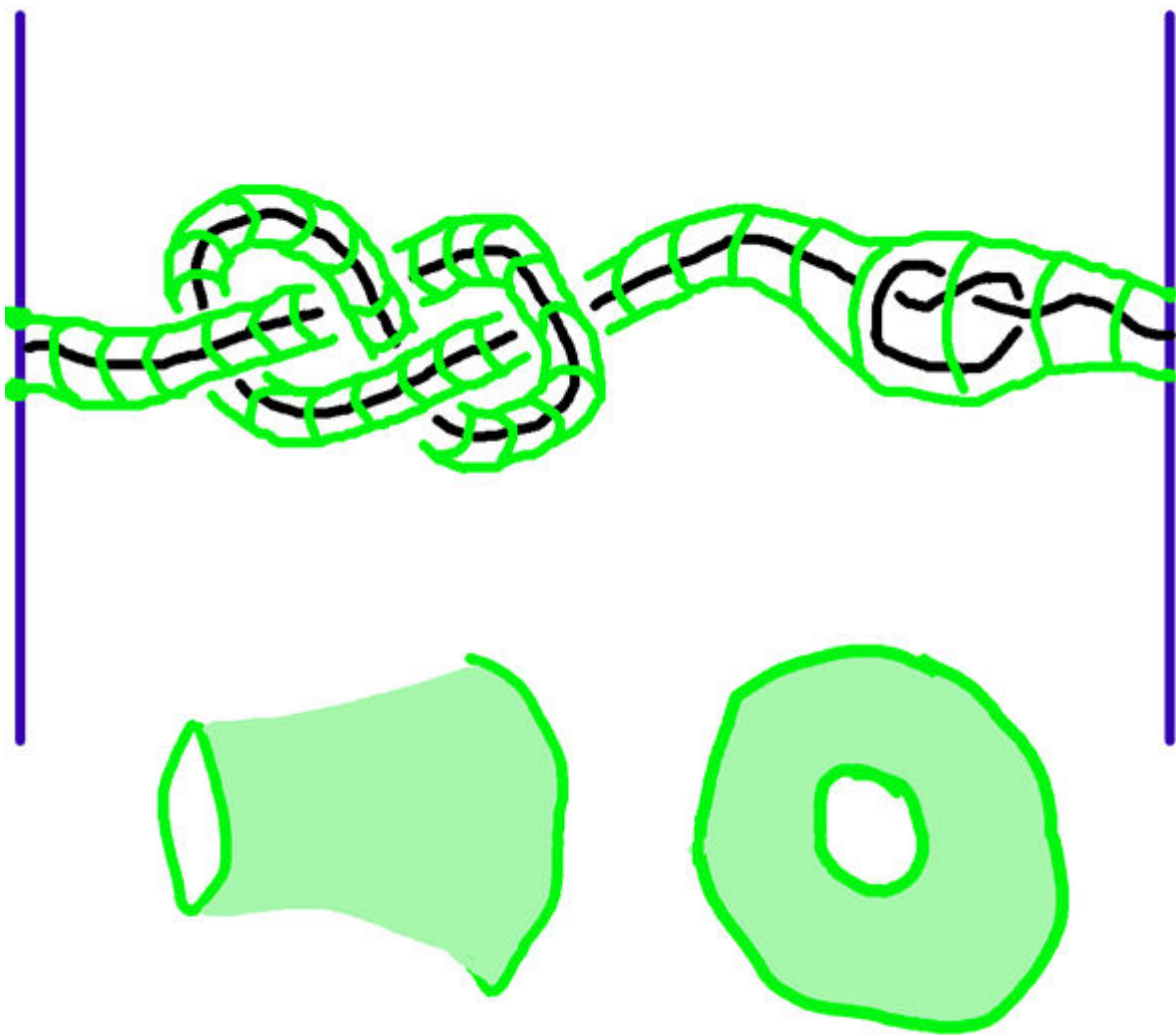
Теорема: связная сумма нетривиальных узлов нетривиальна



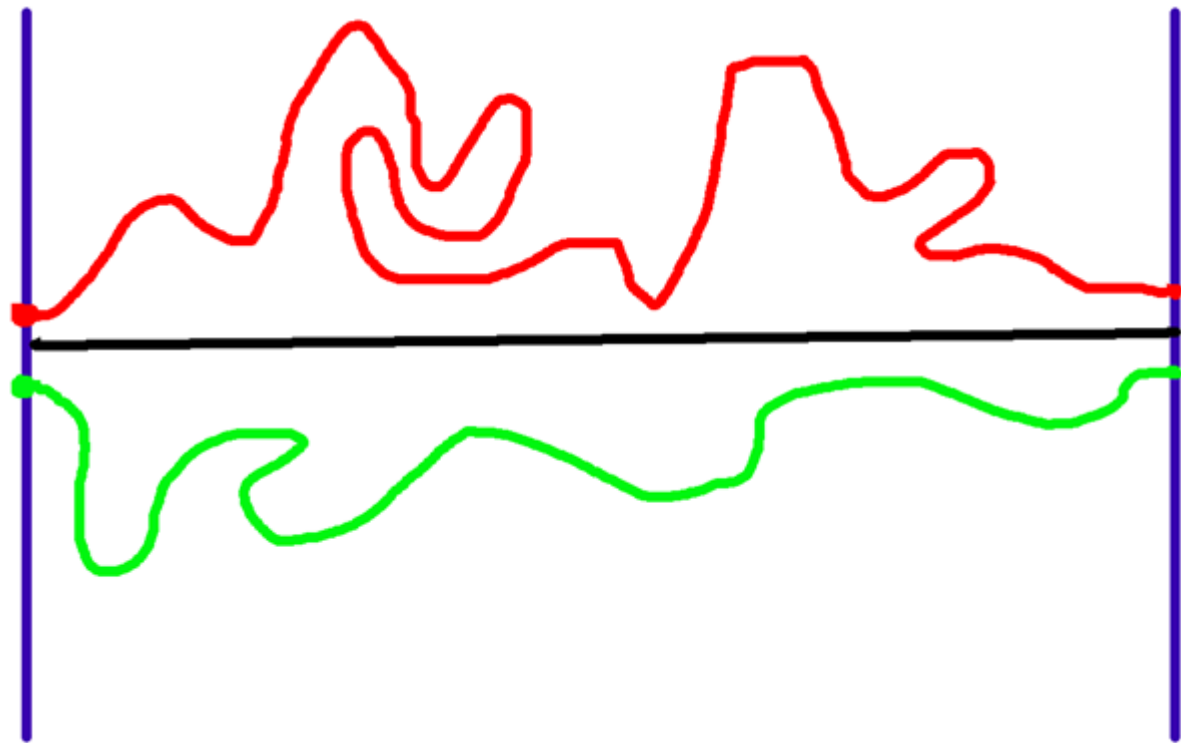
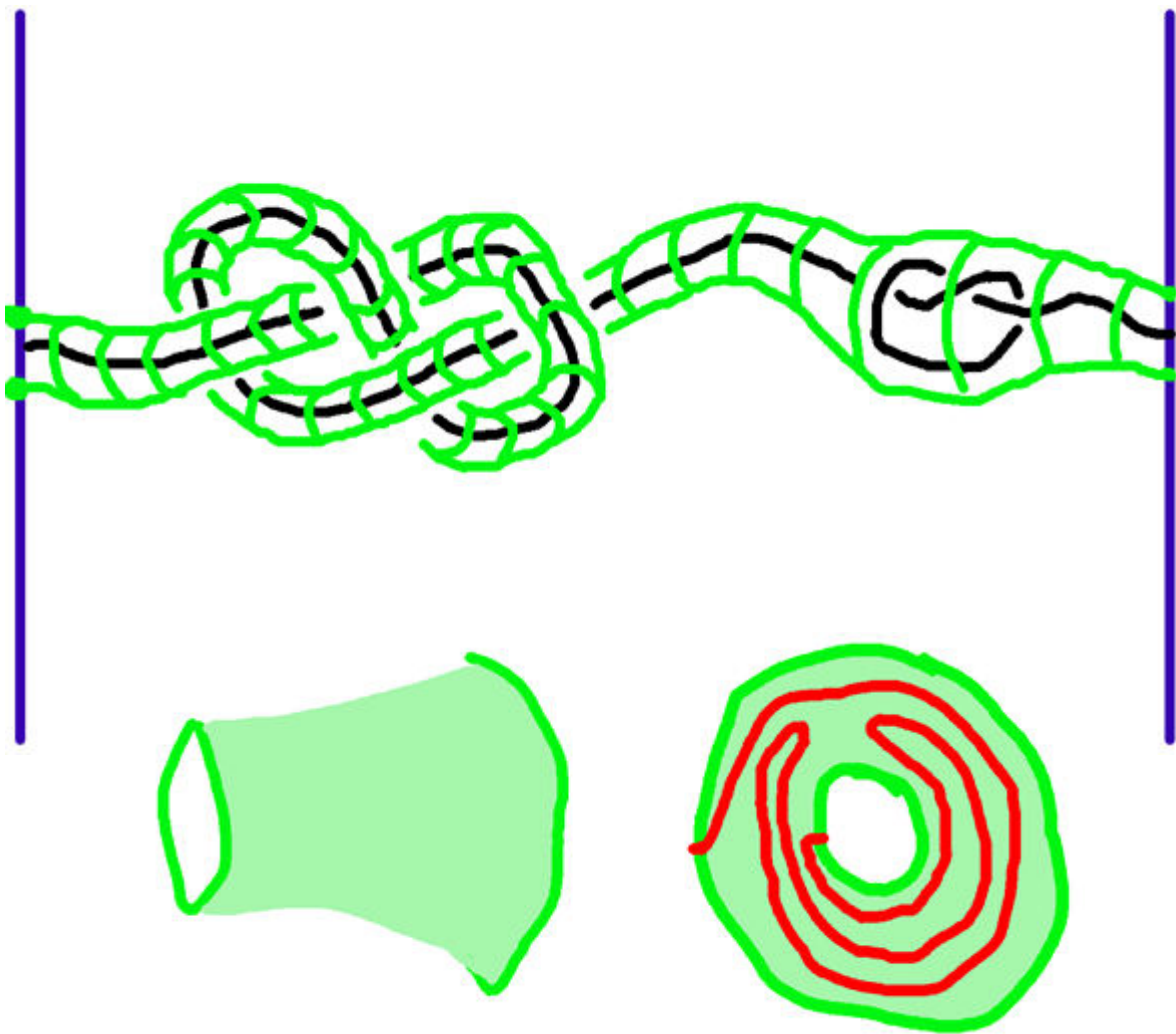
Теорема: связная сумма нетривиальных узлов нетривиальна



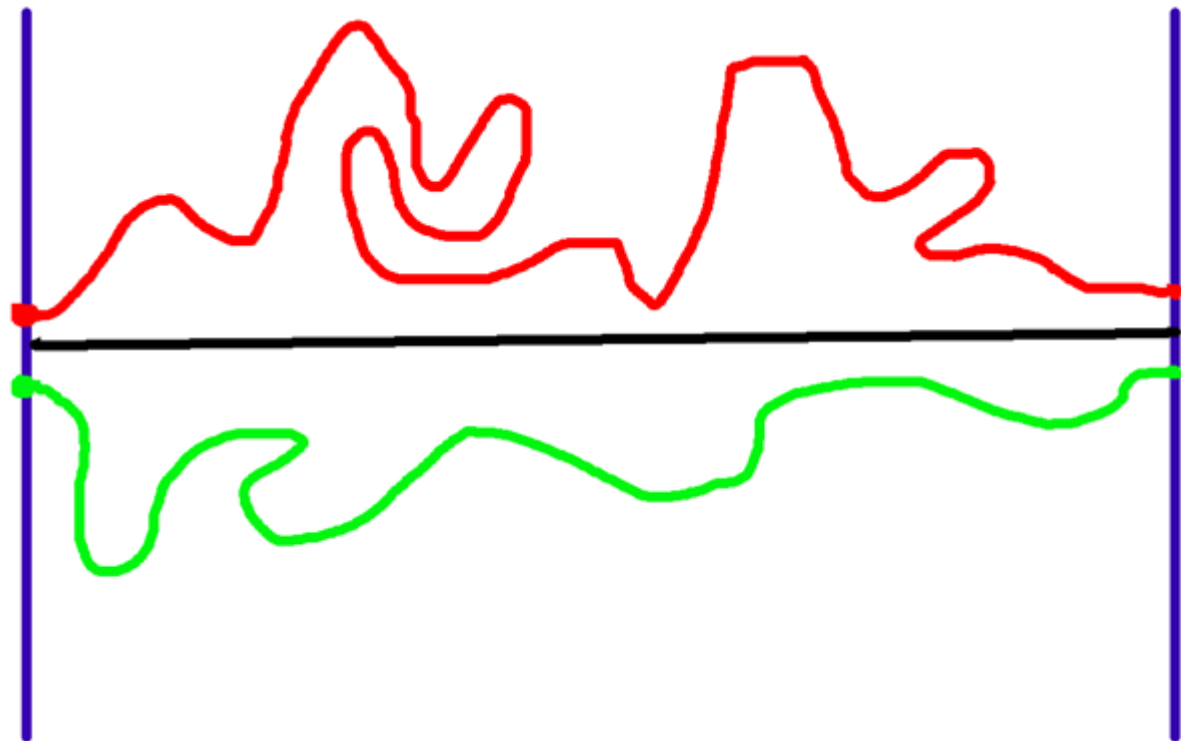
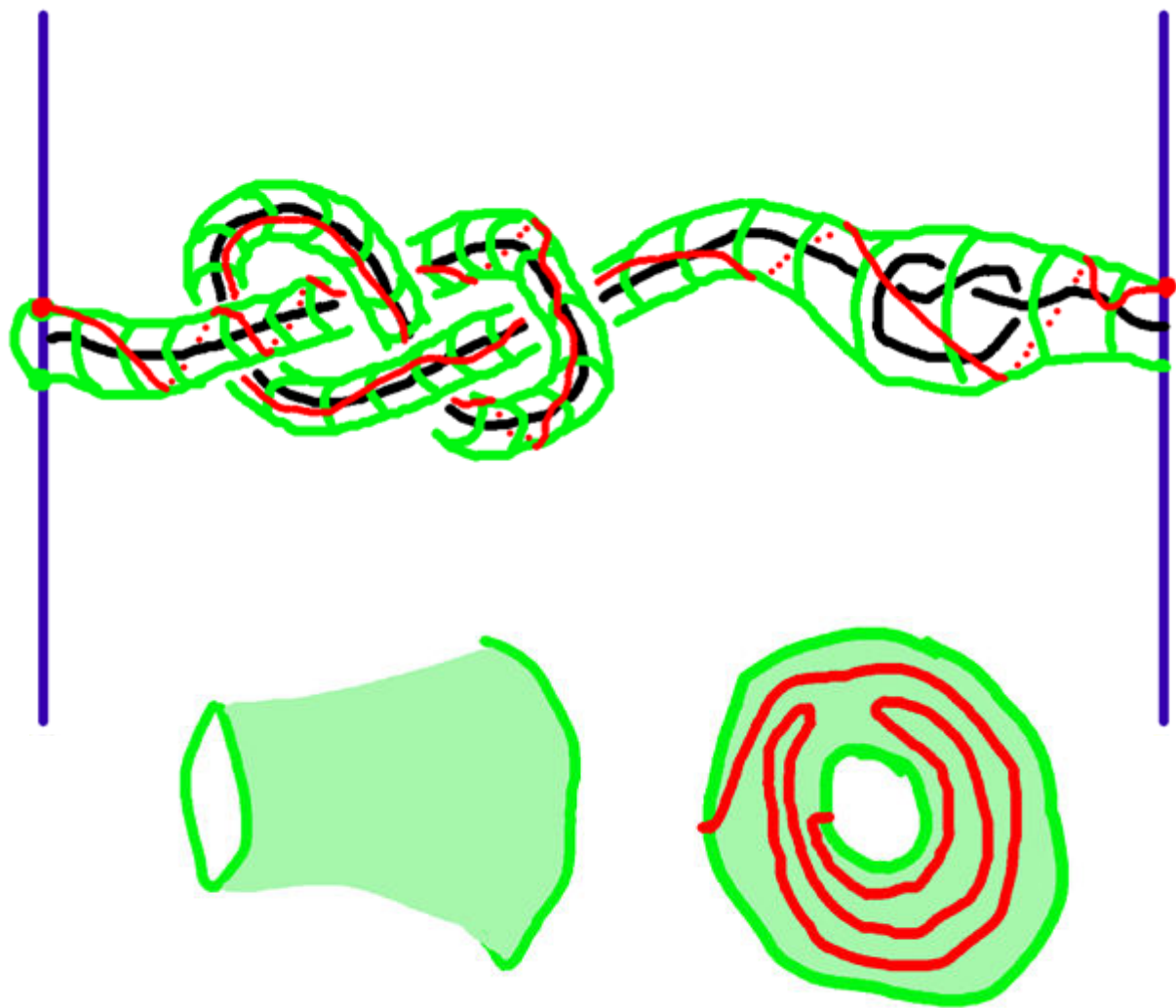
Теорема: связная сумма нетривиальных узлов нетривиальна



Теорема: связная сумма нетривиальных узлов нетривиальна



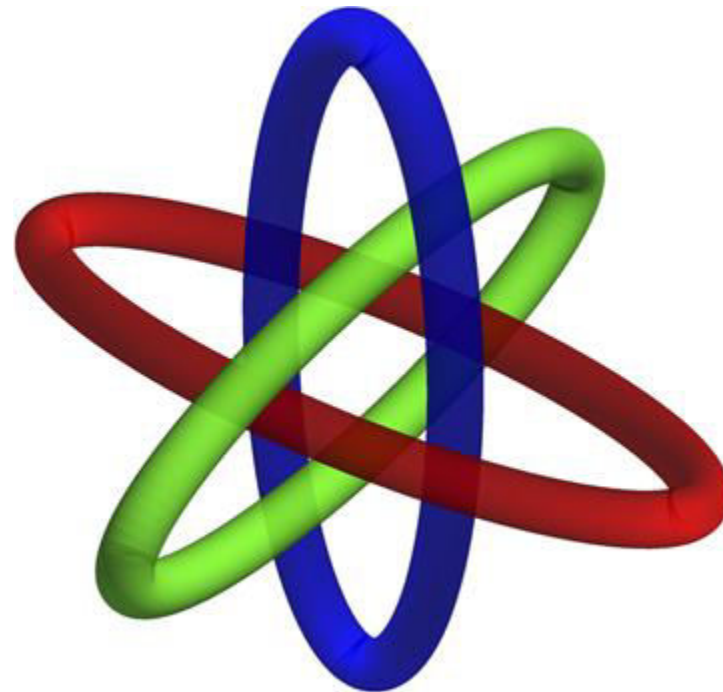
Теорема: связная сумма нетривиальных узлов нетривиальна



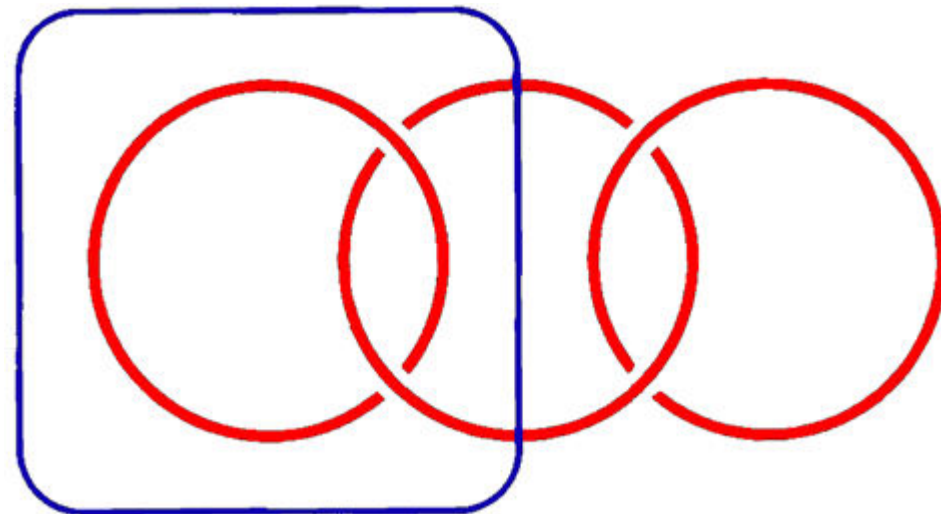
Решите задачу

Нетривиальное зацепление называется **брунновым**, если при удалении любой его компоненты получается тривиальное зацепление.

Докажите, что любое брунново зацепление является простым.



Зацепление Борромео



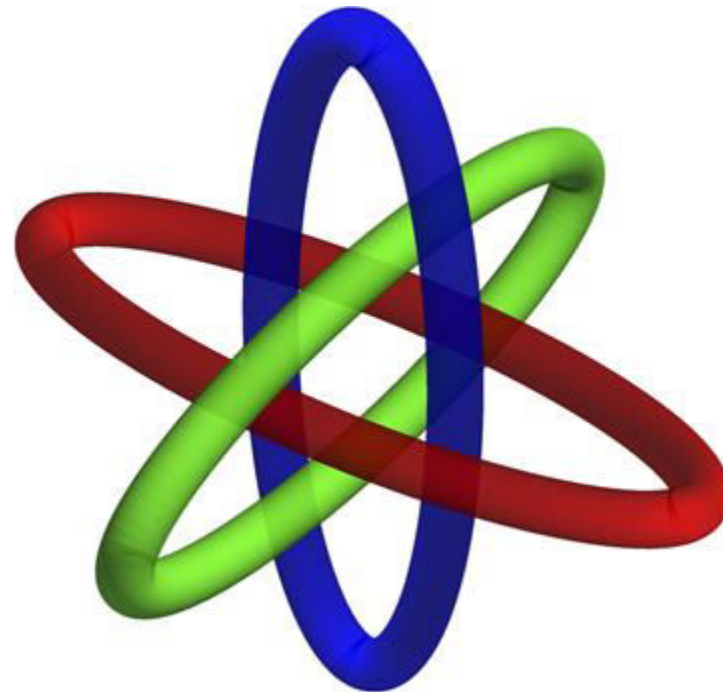
Составное зацепление

Решите задачу

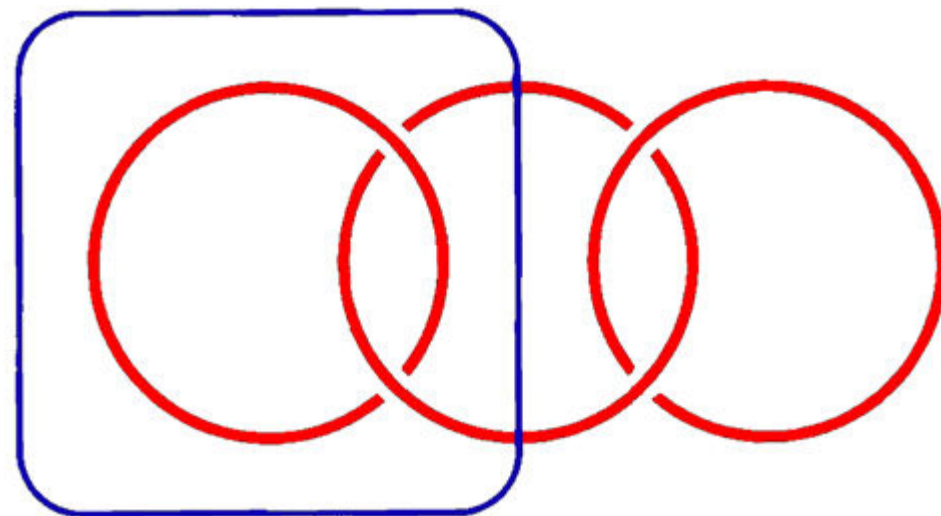
Нетривиальное зацепление называется **брунновым**, если при удалении любой его компоненты получается тривиальное зацепление.

Докажите, что любое брунново зацепление является простым.

“Простые числа (13, 61, 937) зацеплены по модулю 2 (их Rédei symbol равен -1), но попарно не зацеплены (их Legendre symbols равны 1)”



Зацепление Борромео



Составное зацепление

Теорема: связная сумма нетривиальных узлов нетривиальна.

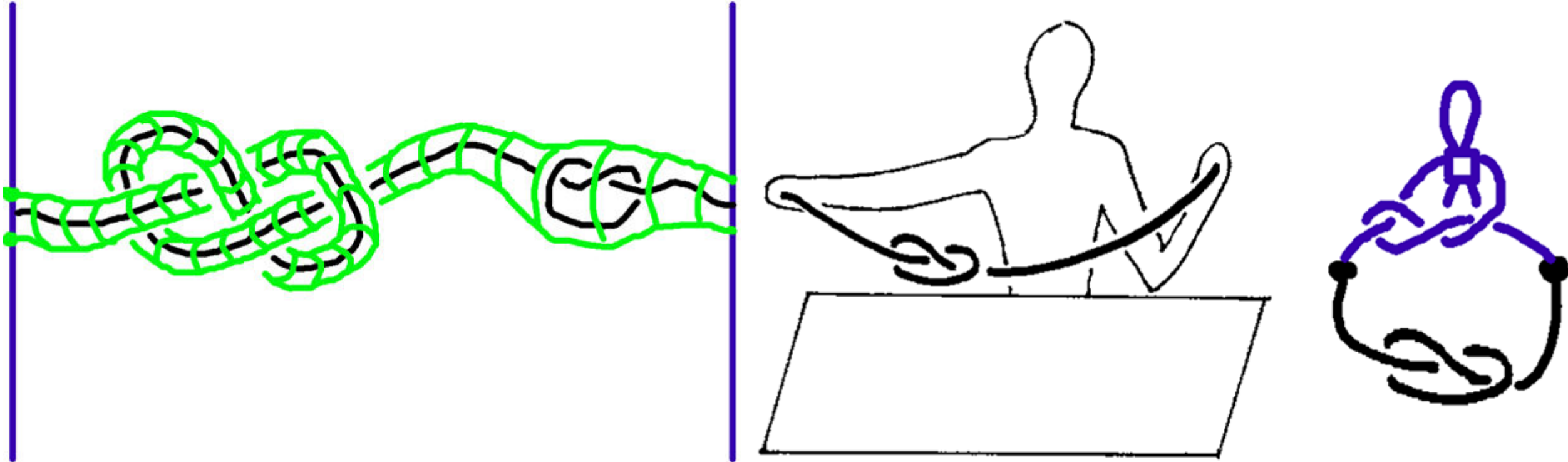


Диаграмма зацепления называется **минимальной**, если она имеет наименьшее количество перекрёстков среди всех диаграмм данного зацепления.

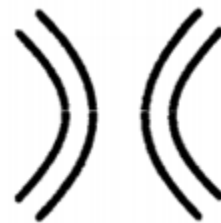
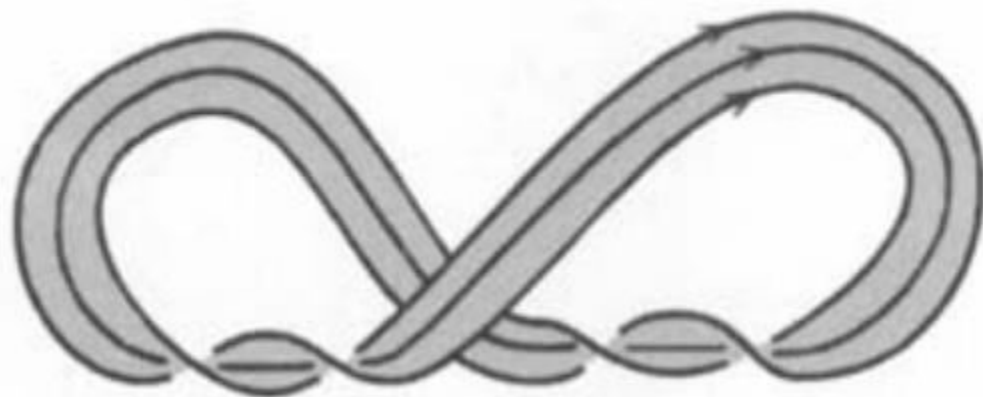
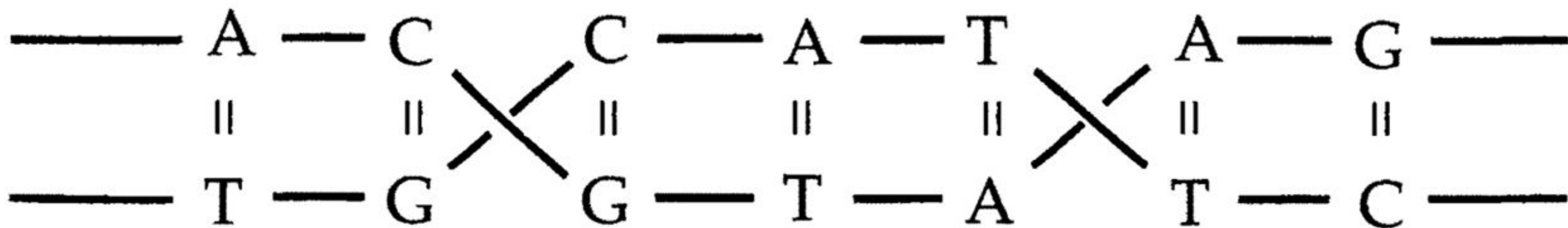
Гипотеза: связная сумма минимальных диаграмм минимальна.

Теорема (Marc Lackenby, 2009): $CR(L\#F) \geq (CR(L) + CR(F))/152$.

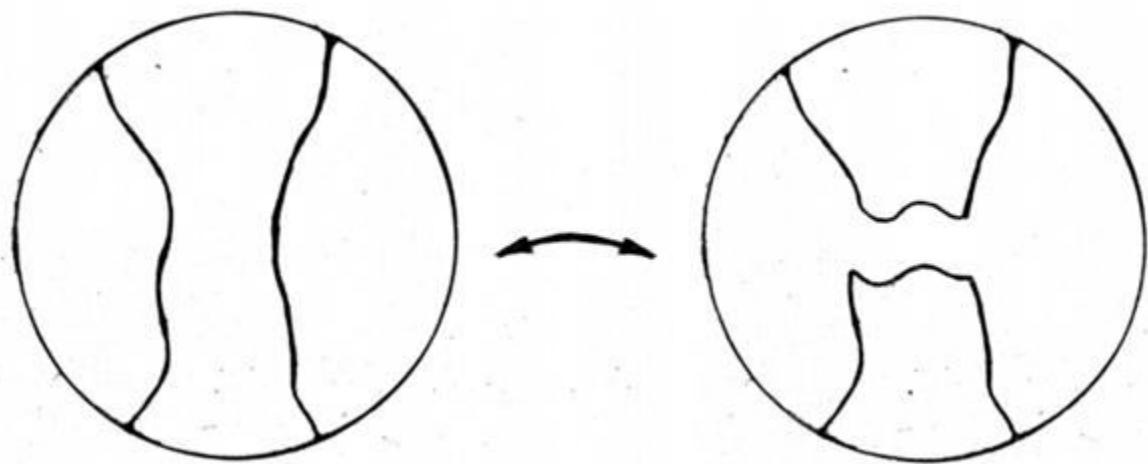
The background of the image is a dense grid of approximately 100 mathematical knot diagrams. Each diagram is a closed loop or a set of loops intertwined in various ways, representing different topological structures. The diagrams are rendered in a variety of colors, including red, blue, green, yellow, orange, purple, and pink, which helps to distinguish between different types of knots. The grid is organized into roughly 10 rows and 10 columns, with the central text overlaying the middle portion of it.

Ленточная хирургия

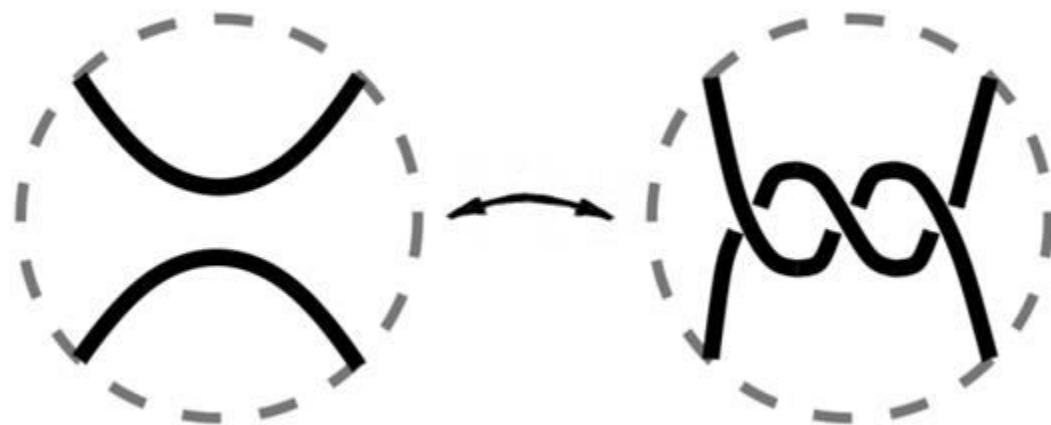
Теория узлов и ДНК



Хирургии над узлами и зацеплениями

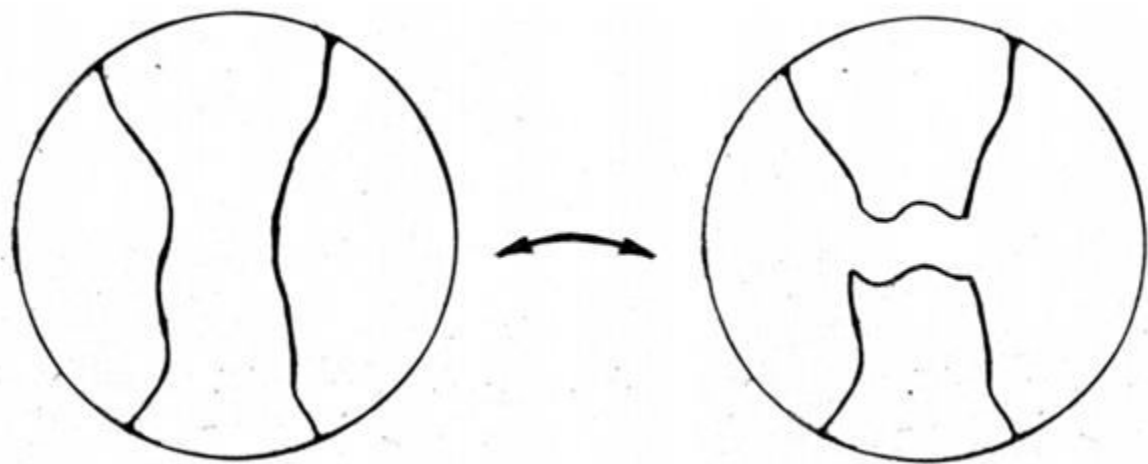


Ленточная хирургия
(band surgery)

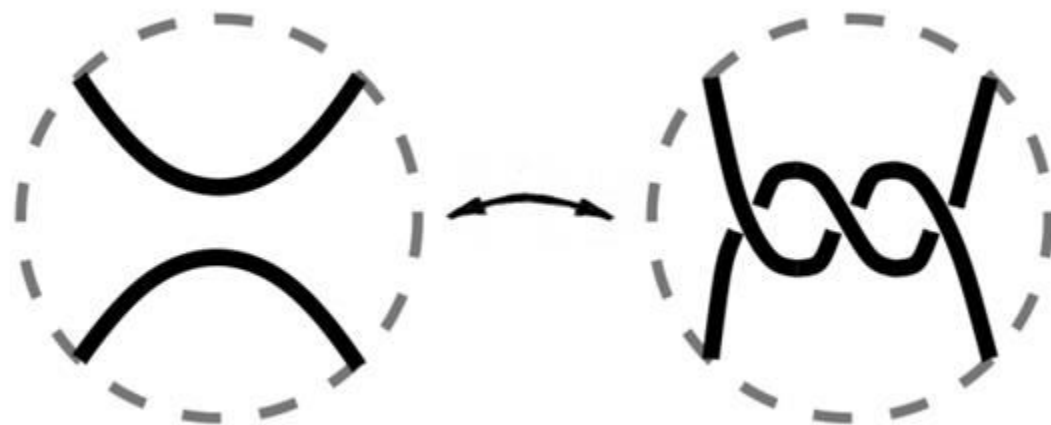


3-движение
(3-move)

Хирургии над узлами и зацеплениями



Ленточная хирургия
(band surgery)

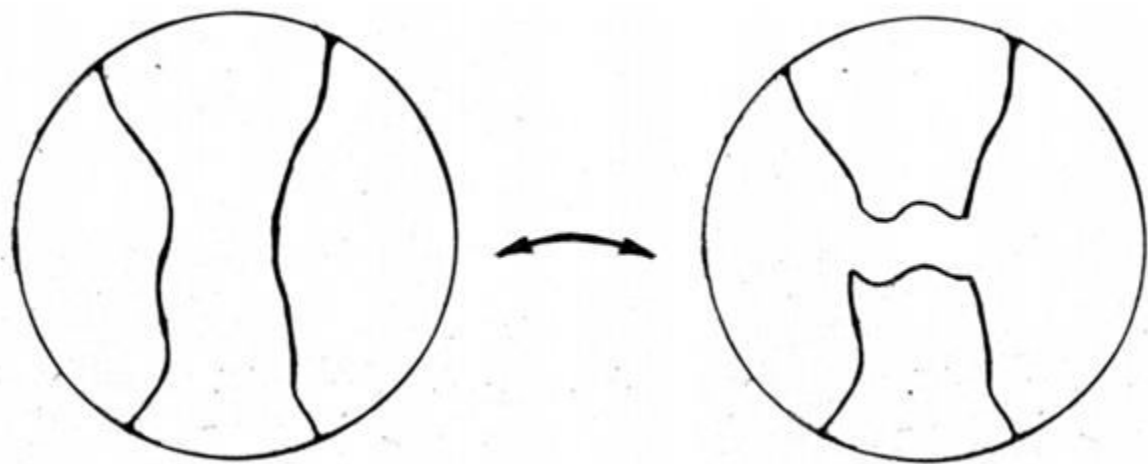


3-движение
(3-move)

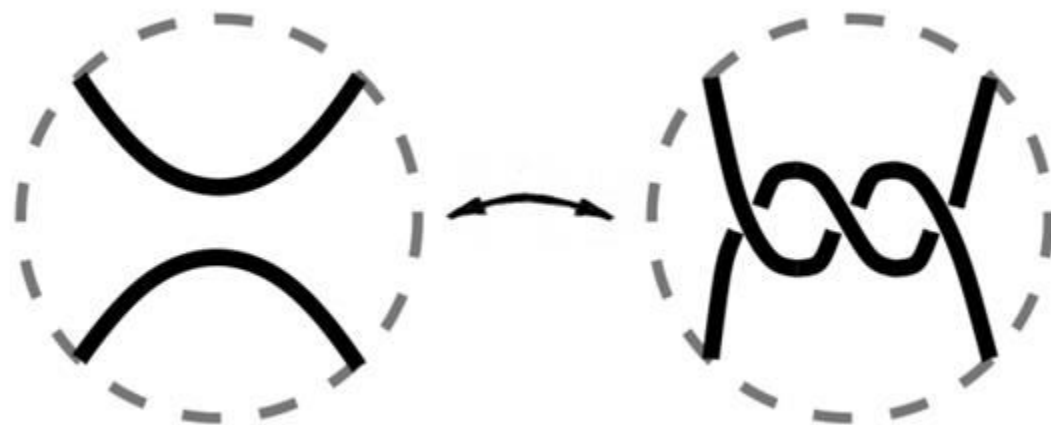
Решите задачу

Докажите, что любой узел можно получить из любого другого с помощью последовательности ленточных хирургий

Хирургии над узлами и зацеплениями



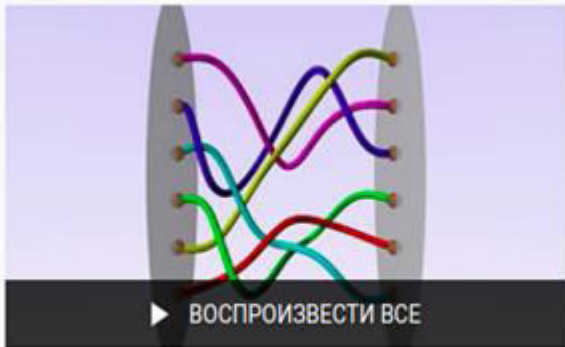
Ленточная хирургия
(band surgery)



3-движение
(3-move)

Теорема (2020). Из любого зацепления можно получить простое с помощью одной ленточной хирургии.

Домашнее задание: посмотрите видео



▶ ВОСПРОИЗВЕСТИ ВСЕ

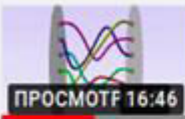
Braids - the movie

4 видео • 3 616 просмотров • Обновлено 3 нояб. 2015 г.

⌵ ⌵ ⌵ ⋮

A movie in computer graphics on braid theory, a research area in mathematics involving topology and group theory. It explains informally topics very close to current research.

 Ester Dalvit [ПОДПИСАТЬСЯ](#)

1  **Braids. Chapter 1 - The group structure**
Ester Dalvit
ПРОСМОТР 16:46

2  **Braids. Chapter 2 - The word problem**
Ester Dalvit
ПРОСМОТР 14:19

3  **Braids. Chapter 3 - The world of knots**
Ester Dalvit
ПРОСМОТР 14:31

4  **Braids. Chapter 4 - Hilden dances**
Ester Dalvit
ПРОСМОТР 12:29



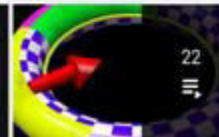
Маломерная топология

36 подписчиков

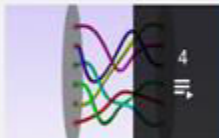
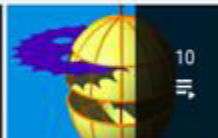
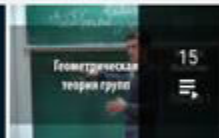
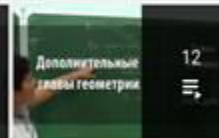
ГЛАВНАЯ ВИДЕО ПЛЕЙЛИСТЫ КАНАЛЫ ОБСУЖДЕНИЕ О КАНАЛЕ

Все плейлисты ▾

Все плейлисты

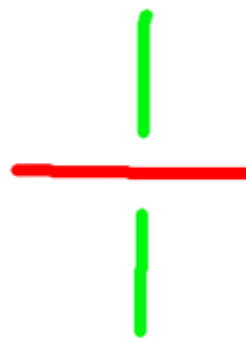
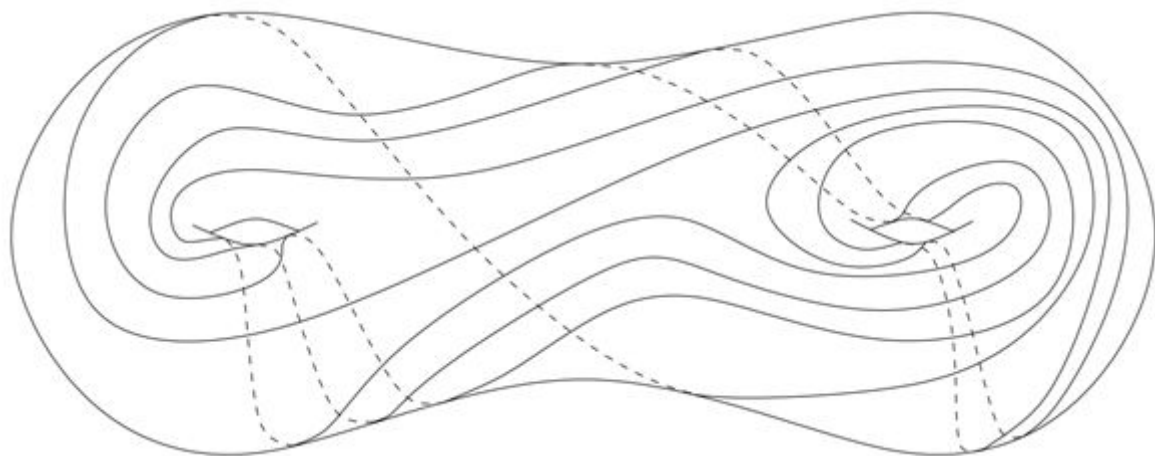
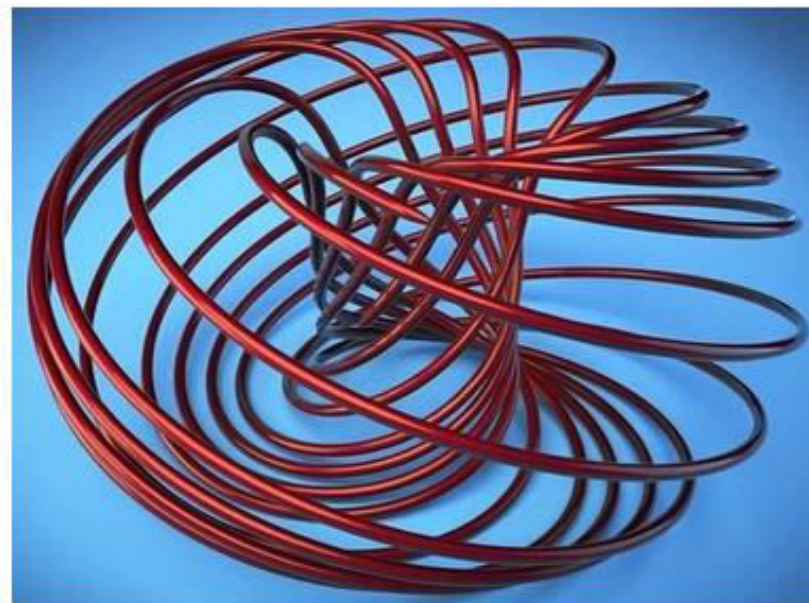
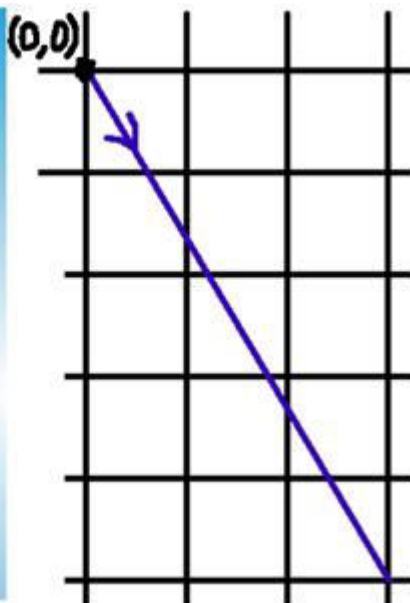
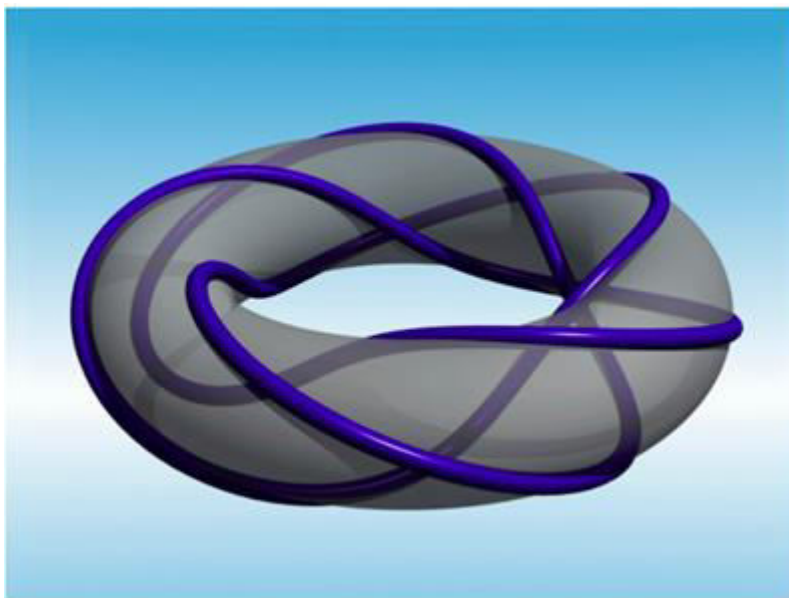
 3 Master-class «Создадим идеальный спецкурс по...» ПОСМОТРЕТЬ ВСЕ ПЛЕЙЛИСТ	 11 Узлы и косы ПОСМОТРЕТЬ ВСЕ ПЛЕЙЛИСТ	 12 Топологические семинары Санкт-Петербурга ПОСМОТРЕТЬ ВСЕ ПЛЕЙЛИСТ	 22 Поверхности ПОСМОТРЕТЬ ВСЕ ПЛЕЙЛИСТ
---	---	--	---

Сохраненные плейлисты

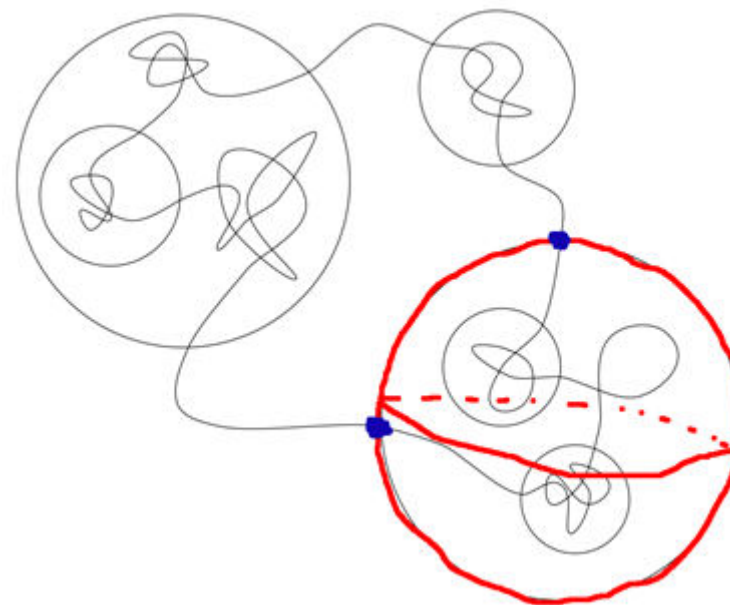
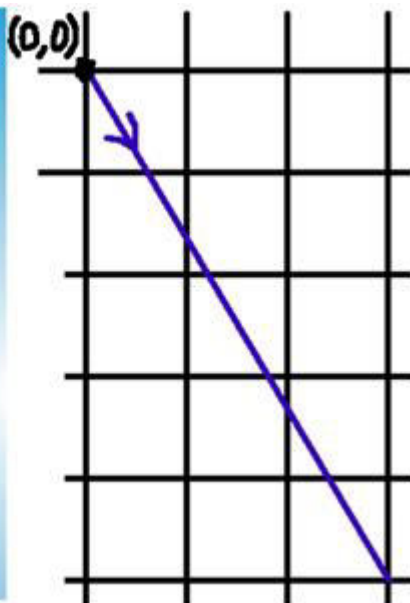
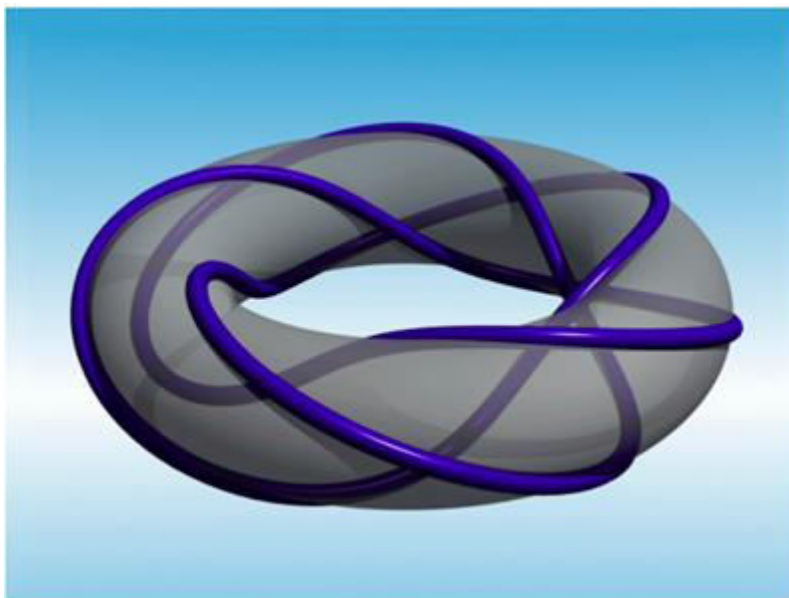
 4 Braids - the movie Ester Dalvit ПОСМОТРЕТЬ ВСЕ ПЛЕЙЛИСТ	 10 Измерения / Dimensions (2009) Научный клуб ПОСМОТРЕТЬ ВСЕ ПЛЕЙЛИСТ	 15 Геометрическая теория групп Андрей Малютин Лекторий ПОСМОТРЕТЬ ВСЕ ПЛЕЙЛИСТ	 12 Дополнительные главы геометрии Лекторий ПОСМОТРЕТЬ ВСЕ ПЛЕЙЛИСТ
---	---	--	--

То же текстом (кратко): matematita.science.unitn.it/braids/summary.html

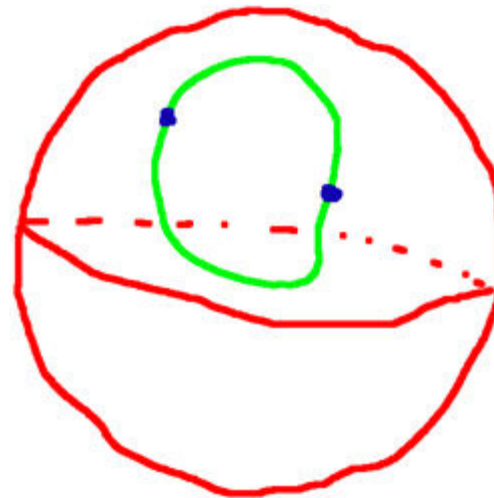
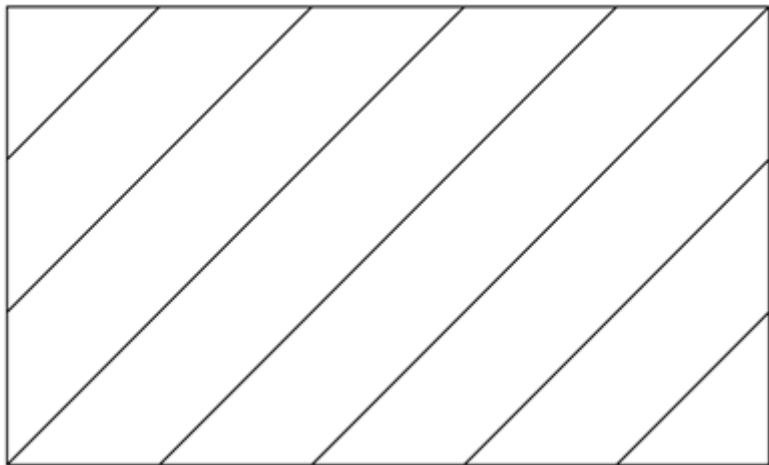
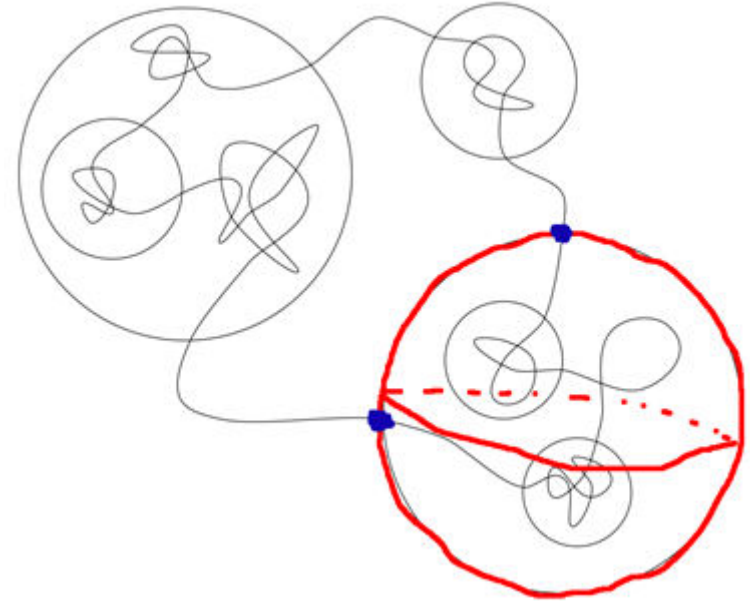
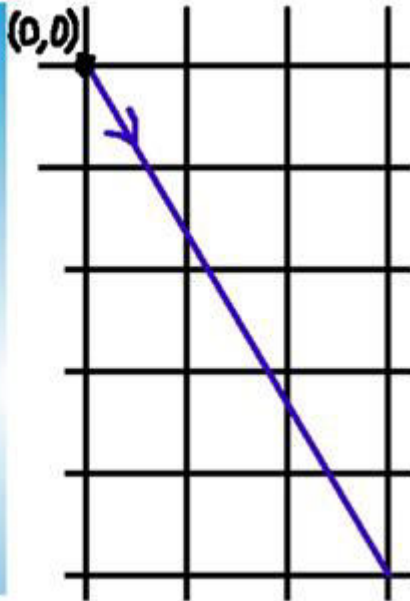
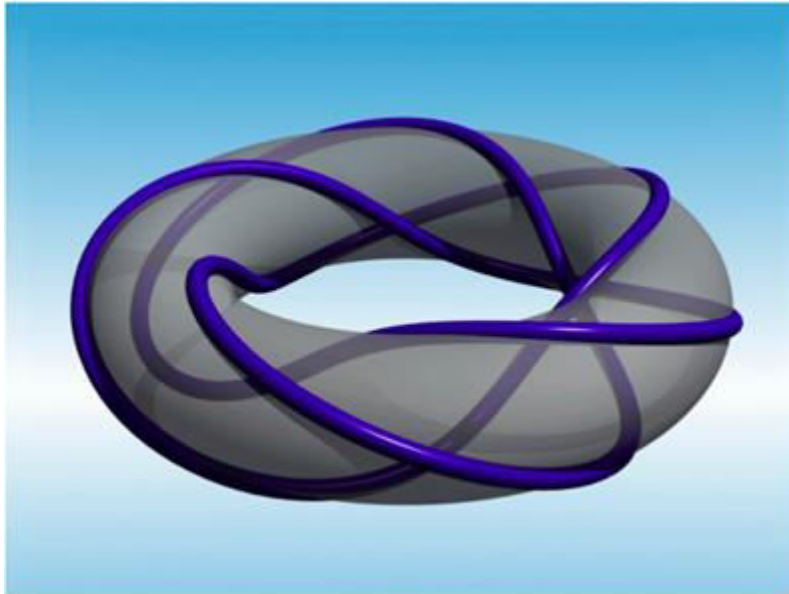
Размещение узлов на незаузленных поверхностях



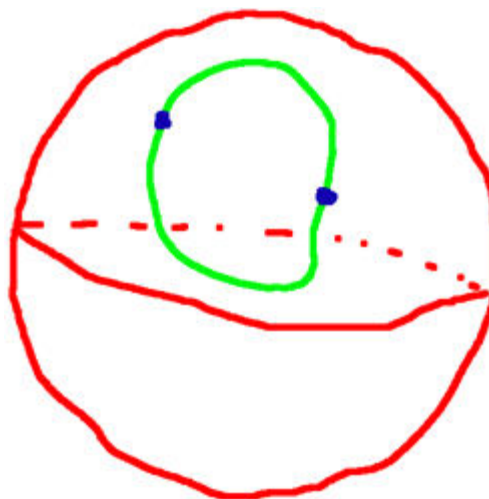
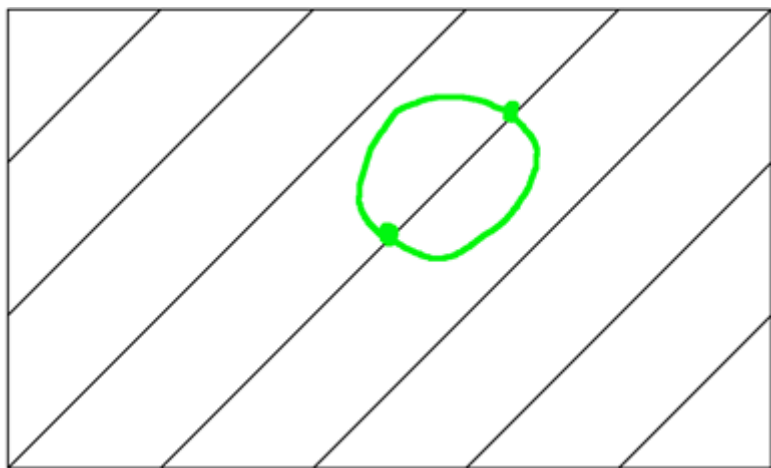
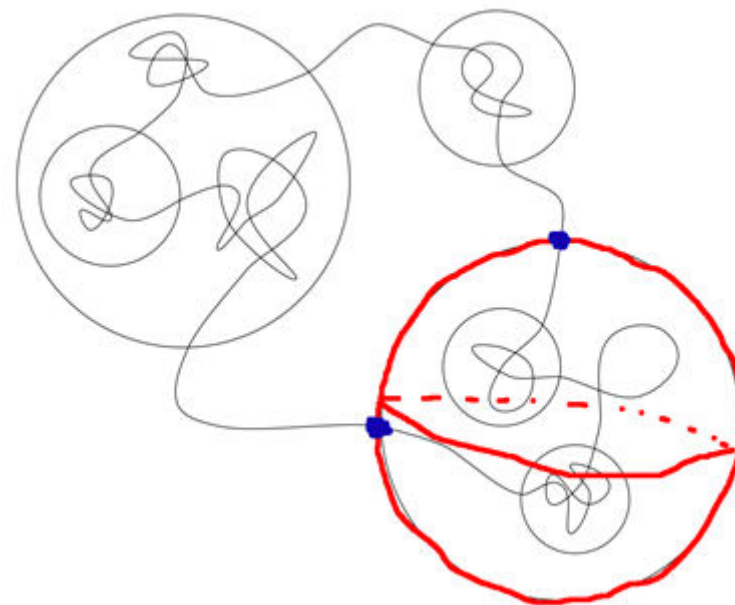
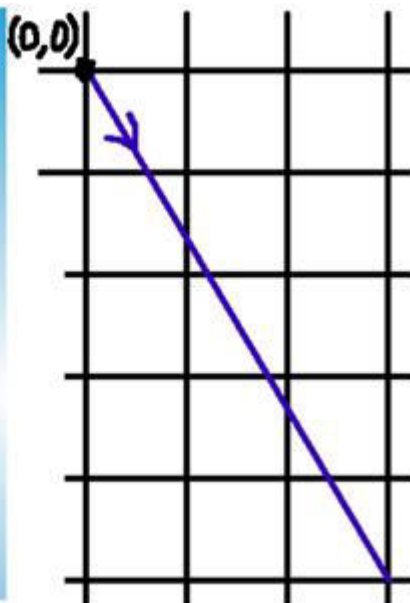
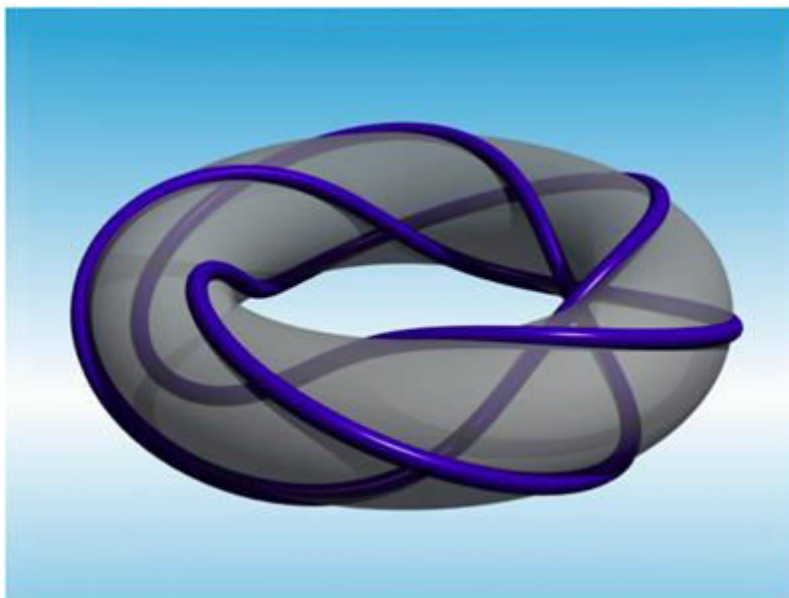
Торические узлы являются простыми



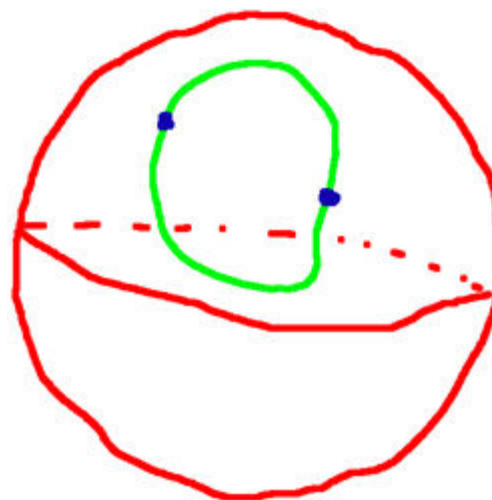
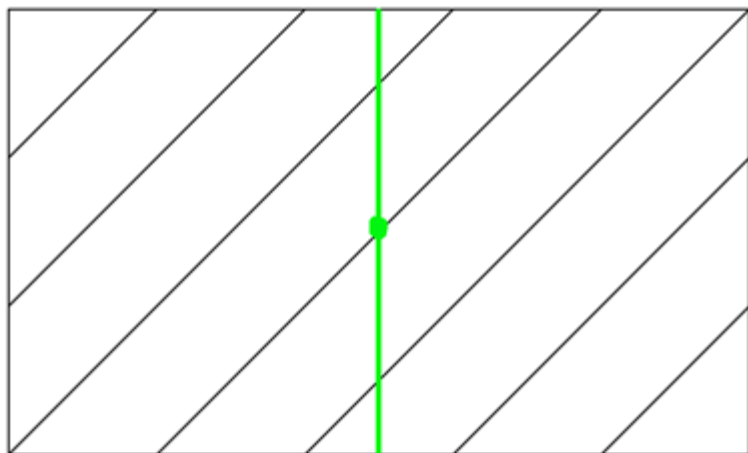
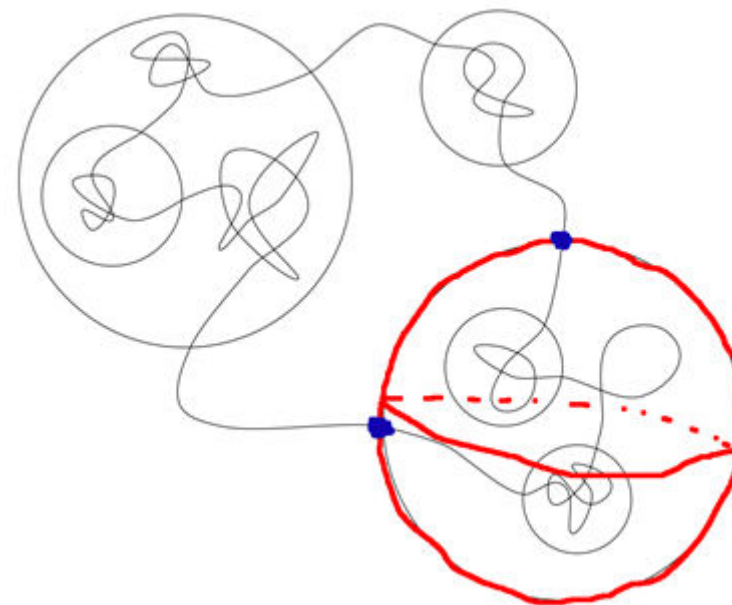
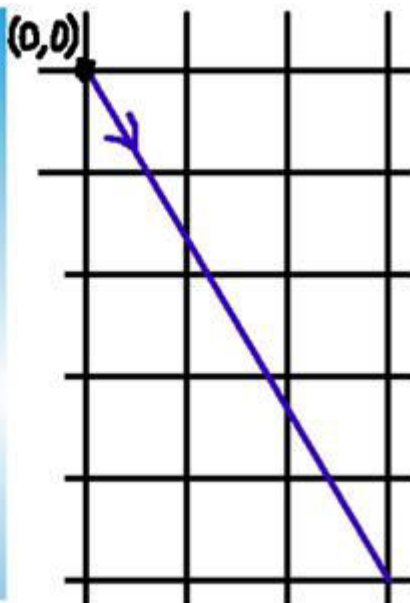
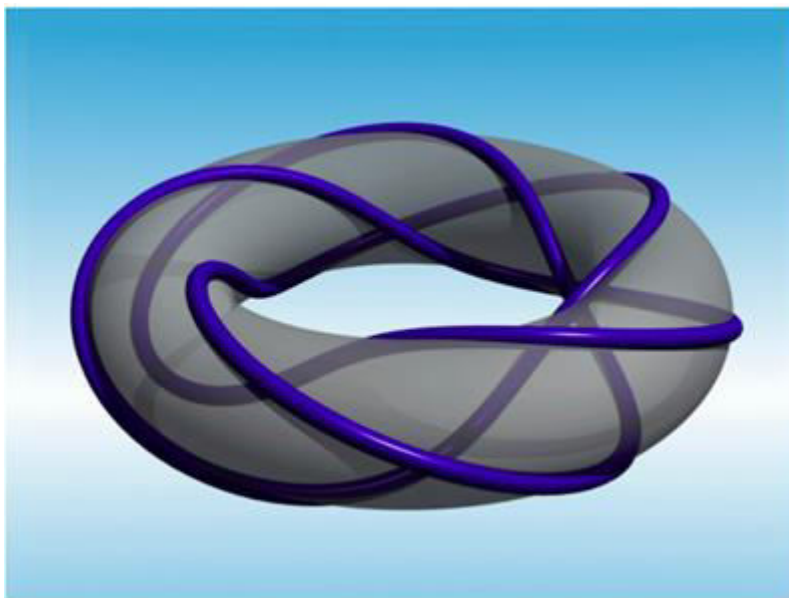
Торические узлы являются простыми



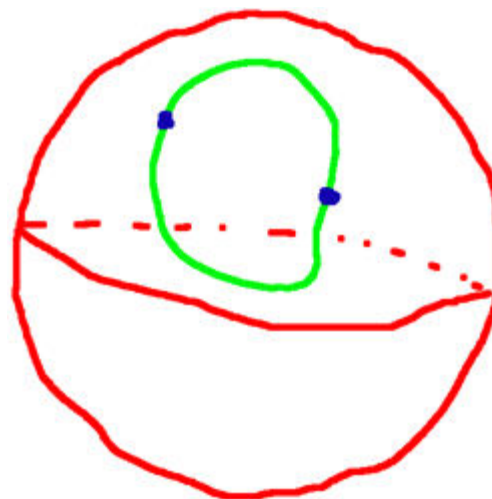
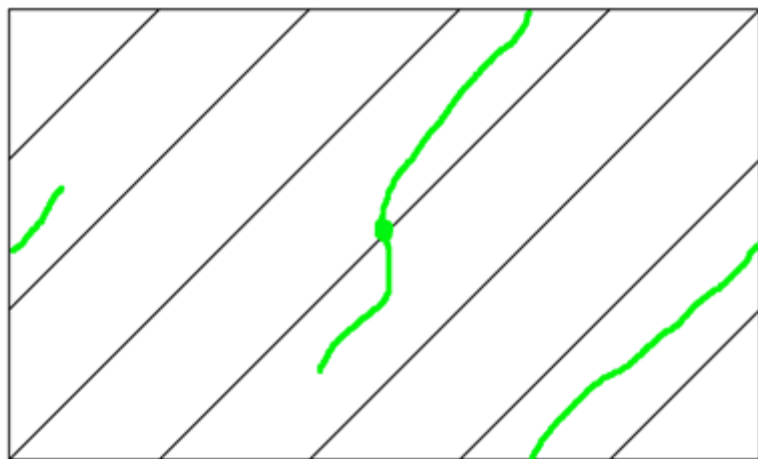
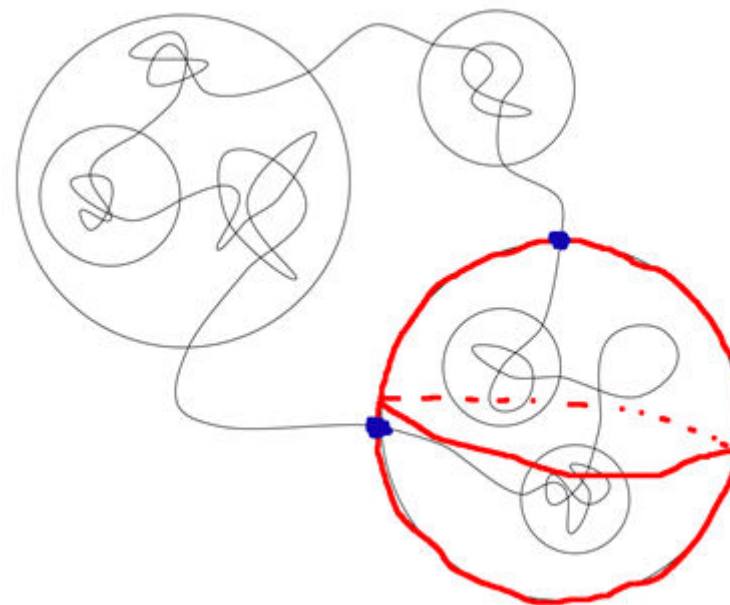
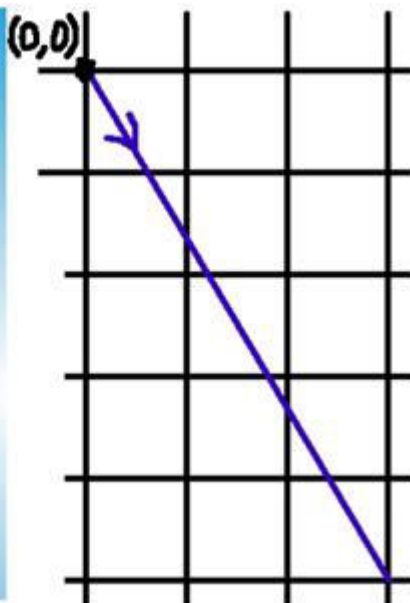
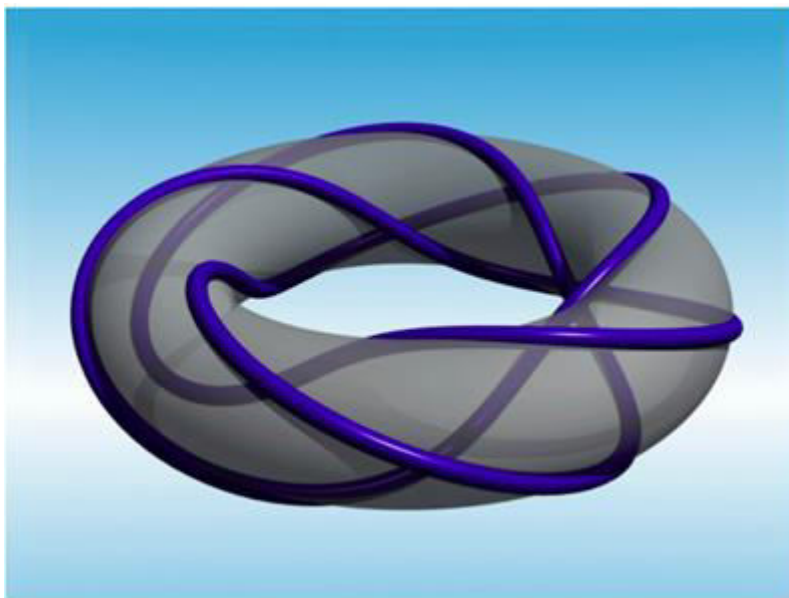
Торические узлы являются простыми



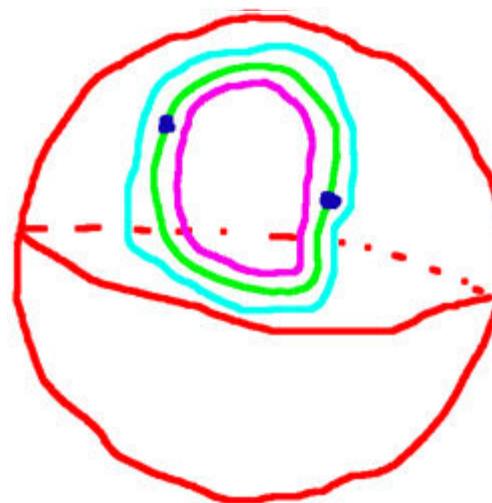
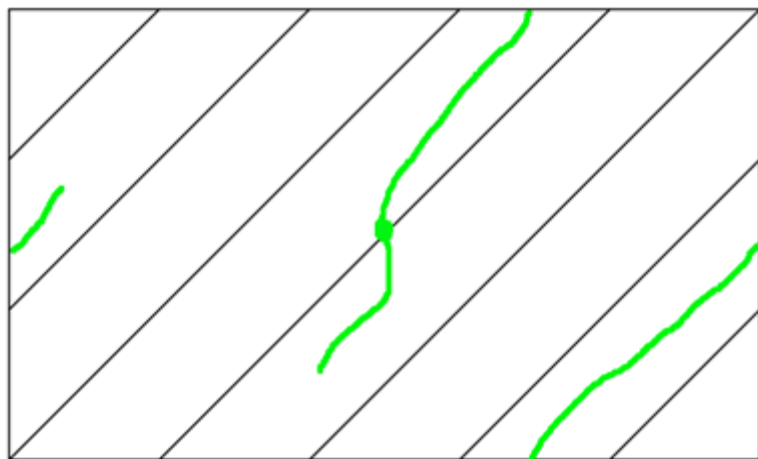
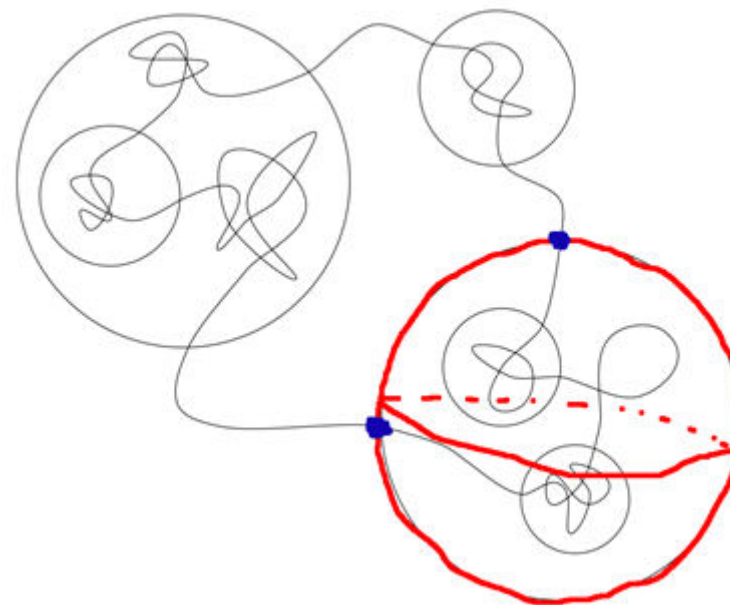
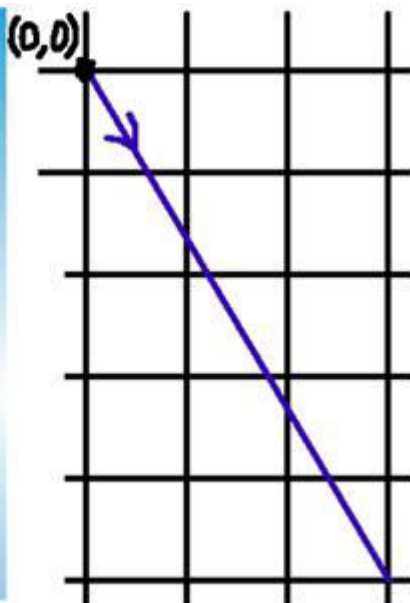
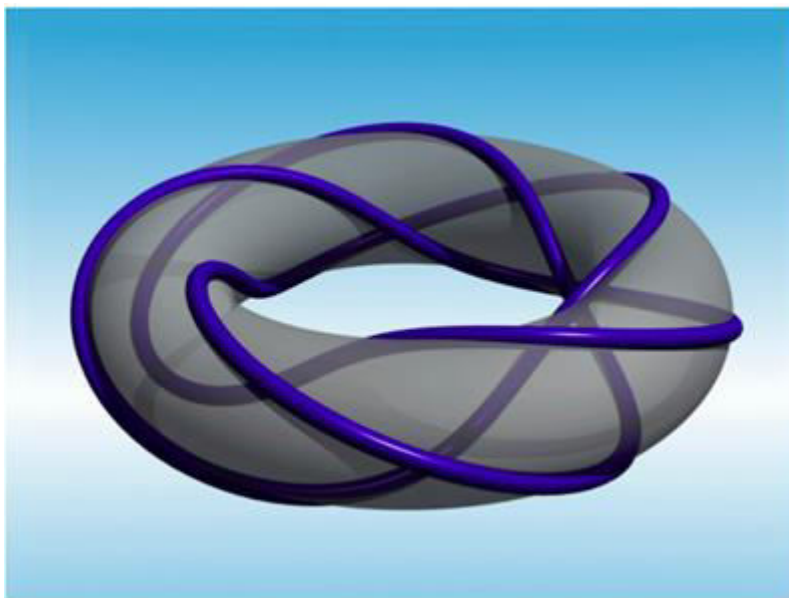
Торические узлы являются простыми



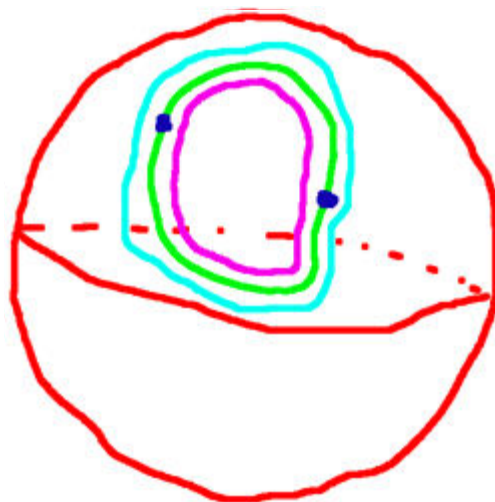
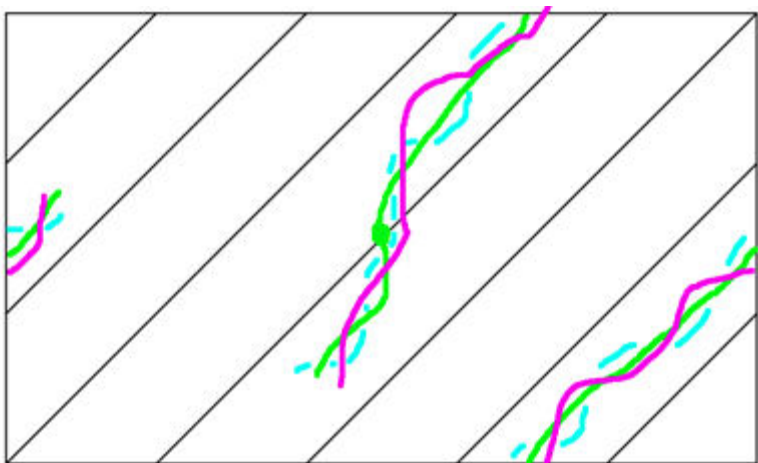
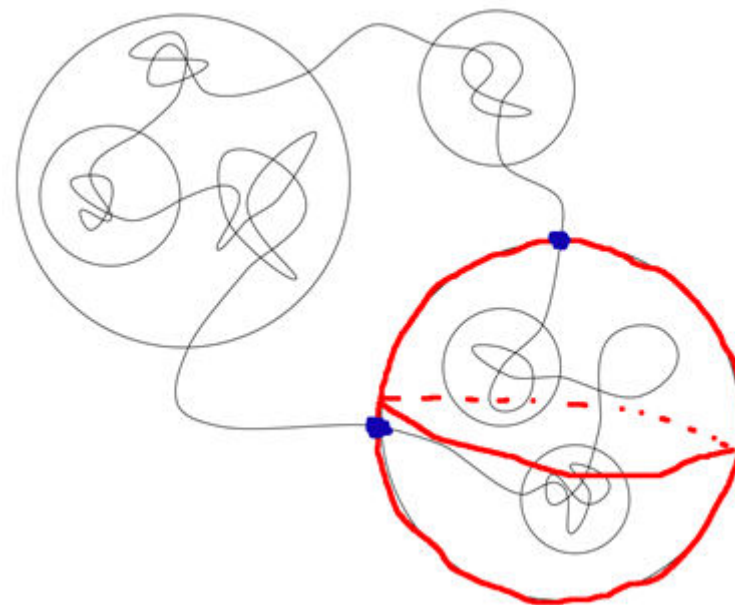
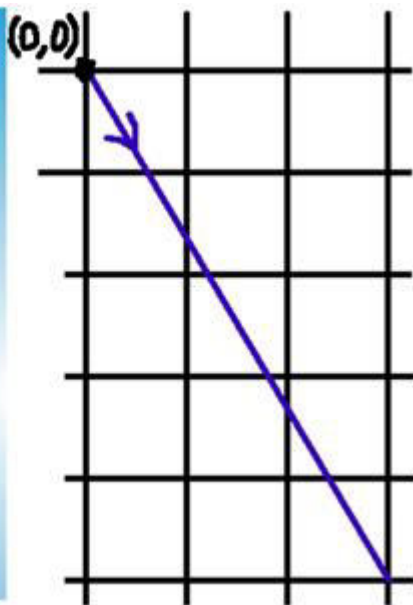
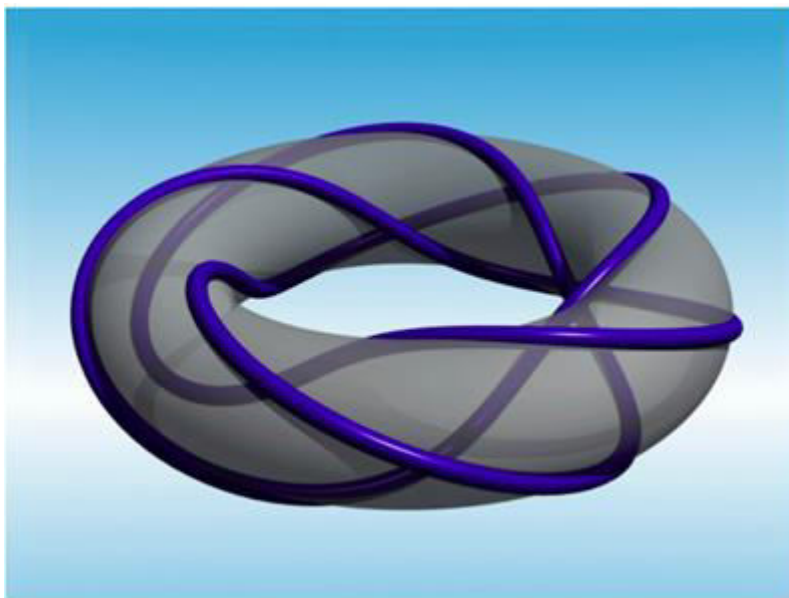
Торические узлы являются простыми



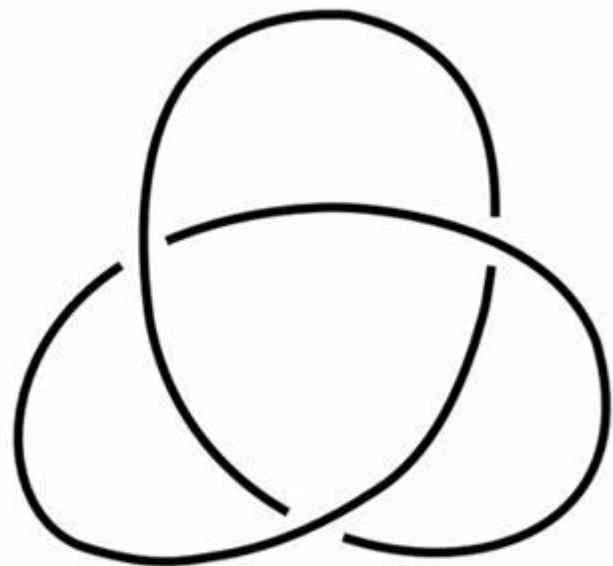
Торические узлы являются простыми



Торические узлы являются простыми



Преобразования Райдемайстера



trefoil knot

Теорема Райдемайстера:

Две диаграммы представляют одно и то же зацепление тогда и только тогда, когда одно можно получить из другого конечной последовательностью преобразований R_0 , R_1 , R_2 , R_3 .

